Ths. TRẦN ĐÌNH CƯ

(Giáo viên chuyên luyện thi Quốc Gia, Bồi Dưỡng HSG MTCT)

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY
CASIO 570VN PLUS

DÀNH CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

- ✓ Dành cho học sinh lớp 10, 11, 12
- ✓ Học sinh Giỏi Đội tuyển MTCT
- ✓ Giáo viên giảng dạy, bồi dưỡng và luyện thi



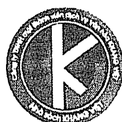
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc - Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập : NGUYỄN CẢNH BA
Chế bản : CÔNG TY KHANG VIỆT
Trình bày bìa : CÔNG TY KHANG VIỆT

Tổng phát hành và đối tác liên kết xuất bản:



CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08. 3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

SÁCH LIÊN KẾT

CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CẦM TAY CASIO 570VN PLUS DÀNH CHO HỌC SINH THPT

Mã số: 1L–131ĐH2015
Mã số ISBN: 978–604–62–2277–4
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm
Tại: Cty TNHH MTV IN ẤN MAI THỊNH ĐỨC
Địa chỉ: 71, Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 351 – 2015/CXBIPH/13 – 74/ĐHQGHN ngày 09/02/2015.
Quyết định xuất bản số: 153LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, cấp ngày 24/03/2015.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2015.

LỜI MỞ ĐẦU

Để bắt kịp sự phát triển của xã hội trong bối cảnh bùng nổ thông tin, ngành giáo dục và đào tạo phải đổi mới phương pháp dạy học một cách mạnh mẽ nhằm đào tạo những con người có đầy đủ phẩm chất của người lao động trong nền sản xuất tự động hóa như: năng động, sáng tạo, tự chủ, kỷ luật nghiêm, có tính tổ chức, tính trật tự của các hành động và có ý thức suy nghĩ tìm giải pháp tối ưu khi giải quyết công việc. Muốn đạt được điều đó, một trong những việc cần thiết phải thực hiện trong quá trình dạy học là tận dụng các phương tiện hiện đại hỗ trợ vào quá trình dạy và học trong đó có máy tính cầm tay (MTCT).

Vào những năm 1970, cuộc cách mạng công nghệ máy tính chuyển sang khuynh hướng chế tạo thiết bị cầm tay. Năm 1972, MTCT được phát minh, với kích thước nhỏ gọn nhưng có khả năng hiển thị các hàm số, tính giá trị hàm số tại một điểm, lưu và trả kết quả dữ liệu đưa vào, và nhiều chức năng khác. MTCT nhanh chóng phổ biến ở các lớp học toán ở các nước trên thế giới. Từ khi MTCT ra đời, các nhà giáo dục và các nhà nghiên cứu đã quan tâm đến tác động của MTCT vào thành tích học tập của học sinh. MTCT ra đời có làm giảm các kĩ năng cơ bản của học sinh hay không? Vào thời điểm đó, các cuộc tranh luận diễn ra thường xuyên giữa các nhà giáo dục học, các giáo viên và các nhà nghiên cứu ở Hoa Kỳ (và một số nơi khác).

Theo Pat Perks trong dạy và học toán, những tác động to lớn của MTCT được xem xét từ 4 phía cạnh sau:

1. Hứng thú và tự tin: MTCT cung cấp cho học sinh những cách thức khác nhau để giải quyết vấn đề. Học sinh hứng thú, tích cực trong các hoạt động và hoàn chỉnh lời giải một cách chắc chắn;
2. Mở rộng phạm vi của chương trình: MTCT tạo ra cơ hội để học sinh khám phá các tri thức, thậm chí đi xa hơn chương trình của một lớp học;
3. Tăng xu hướng giảng dạy: Đưa việc sử dụng MTCT vào chương trình giảng dạy dưới nhiều hình thức khác nhau để tăng tính hiệu quả của chương trình học của học sinh;
4. Sáng tạo và kiểm chứng: MTCT là công cụ giúp học sinh kiểm tra các kết quả, cho phép các em sáng tạo với những con số và kiểm chứng các ý tưởng.

Theo nghiên cứu (Schuck, 1995) về yếu tố chính ảnh hưởng đến việc học của học sinh là giáo viên, nghiên cứu cho rằng người giáo viên phải có thái độ tích cực đối với toán học và việc sử dụng nguồn tài nguyên công cụ, trong đó có MTCT để làm cho toán học trở nên nhẹ nhàng và có ý nghĩa hơn đối với học sinh. Cũng như trong nghiên cứu (Fleener, 1995; Hembree và Dessart, 1986; Laumakis và Herman, 2008; Ruthven, 1990) đã chỉ ra rằng việc sử dụng MTCT trong giảng dạy có thể tác động tích cực đến cả giáo viên và học sinh.

Tăng hướng dẫn sử dụng MTCT vào quá trình giảng dạy sẽ thu hút người học xây dựng, hình thành và khám phá tri thức, khả năng GQVĐ. Đồng thời thông qua việc thăm dò các ý tưởng và quá trình học của học sinh, giáo viên cũng có cơ hội để học tập và nâng cao khả năng xử lý các tình huống bất ngờ mà người học có thể tạo ra với những ý tưởng táo bạo và sáng tạo trên MTCT của mình.

Ngày nay, hầu hết các nước trên thế giới đều đưa MTCT hỗ trợ trong quá trình giảng dạy toán từ chương trình bậc tiểu học cho đến chương trình bậc đại học. Nhiều nghiên cứu đã chỉ ra rằng: Trong *môi trường máy tính* một số vấn đề toán khó giải thích, đặc biệt với các phép tính phức tạp thì với công cụ máy tính các kết quả được kiểm chứng và minh họa rõ ràng hơn.

Theo Laumakis và Herman (2008) trong các bài kiểm tra cuối khóa ở các trường thì những học sinh có khả năng sử dụng MTCT thành thạo có điểm số cao hơn so với học sinh không sử dụng MTCT hay những học sinh chỉ biết sử dụng MTCT. Điều này cũng đã tương đồng với nghiên cứu của Sigg và Pau O (2000]), đã xác nhận thái độ và niềm tin của giáo viên khi đưa MTCT vào trong lớp học. Các giáo viên thừa nhận, MTCT đã cải thiện được thành tích học tập của học sinh một cách đáng kể.

Nhìn chung, trong các trường phổ thông và đại học ở Việt Nam hiện nay, việc gắn giảng dạy lý thuyết và tính toán thực hành còn chưa được đẩy mạnh. Điều này hoàn toàn không phải vì thiếu công cụ tính toán, mà có lẽ là việc phổ biến cách sử dụng các cộng cụ tính toán chưa được quan tâm. Trong nhiều năm qua Bộ Giáo dục và Đào tạo đều có tổ chức các cuộc thi giải toán MTCT từ cấp Tỉnh đến cấp Quốc gia, tuy nhiên việc hướng dẫn cho học sinh vận dụng MTCT một cách sáng tạo trong quá trình học tập bộ môn toán vẫn đang còn hạn chế.

Nhìn chung học sinh chỉ sử dụng MTCT ở mức độ thực hiện các phép tính đơn giản mà chưa ứng dụng vào mức độ cao hơn như dự đoán kết quả, tư duy sáng tạo, tư duy thuật toán (TDTT) dựa trên công cụ MTCT. Tư duy thuật toán, một dạng tư duy rất cần thiết trong thời đại công nghệ thông tin, được thể hiện trên máy tính điện tử qua nhiều dạng toán có nội dung toán học sâu sắc. TDTT thông qua máy tính điện tử, sẽ là cầu nối giữa hai bộ môn rất gần nhau, nhưng hiện nay được dạy một cách độc lập, ít liên hệ nhau là toán và tin học. Các giáo viên toán có thể hướng dẫn học sinh thực hành trên MTCT thay cho máy tính điện tử để đạt hiệu quả cao trong dạy học. Nhiều thuật toán (tìm số nguyên tố, tính theo công thức truy hồi, tính giới hạn, giải gần đúng phương trình...) trước kia không có khả năng thực hành, nay có thể thực hiện thông qua MTCT.

Với sự phát triển của công cụ tin học, việc học toán ngày càng được cải thiện hơn so với trước đây. Nhiều bài toán xuất phát từ thực tiễn hay các bài toán đòi hỏi độ tính toán phức tạp cao không thể giải quyết được bằng các tính toán thủ công hoặc giải quyết được nhưng mất rất nhiều thời gian. Do đó phải dùng tới tính toán của máy tính điện tử hoặc MTCT.

Máy tính và phần mền tính toán ra đời là nhằm đáp ứng các nhu cầu tính toán phức tạp (kể cả phổ thông lẫn cao cấp) trở thành công cụ làm việc dễ dàng cho mọi người. Một điều thú vị là ngoài vai trò tính toán, MTCT và phần mền toán học có khả năng hỗ trợ rất tốt cho việc dạy và học, nếu chúng ta biết khai thác một cách khéo léo. Việc nắm những thủ tục và thực hành trên máy là không khó khăn, cho nên nếu biết xác định đúng nội dung dạy và học thì chẳng những tránh được cái quá tải không cần thiết, mà còn làm tăng năng lực vận dụng các kiến thức toán học vào các hoạt động thực tiễn giúp học sinh thấy được một phần giá trị đích thực của toán học.

Tuy nhiên, để việc thực hiện tính toán trên MTCT dễ dàng đòi hỏi người sử dụng có hiểu biết sâu sắc về lý thuyết toán học. Mặt khác, nhiều vấn đề lý thuyết (tính tăng giảm, bị chặn, tốc độ hội tụ, độ chính xác, độ phức tạp, tính xấp xỉ...) sẽ được soi sáng trong thực hành tính toán cụ thể.

Vì vậy, việc sử dụng thành thạo công cụ tính toán là cần thiết cho giáo viên và học sinh. Công cụ tính toán sẽ hỗ trợ đắc lực cho việc tiếp cận và truyền đạt các kiến thức lý thuyết, giảng dạy lý thuyết gắn với thực hành tính toán, sẽ giúp học sinh không chỉ tiếp thu tốt các kiến thức khoa học một cách bản chất, sâu sắc, mà còn tiếp cận tốt hơn với các phương pháp giảng dạy và công cụ tính toán hiện đại. Các thuật toán và các quy trình thao tác trên MTCT có thể coi là bước tập dượt ban đầu để học sinh dần quen với kĩ thuật lập trình trên máy tính cá nhân.

Và tác giả thật sự hy vọng cuốn sách sẽ trở thành nguồn cảm hứng cũng như tư liệu bổ ích cho các em học sinh trong các kỳ thi học sinh giỏi giải toán trên MTCT, tài liệu giảng dạy cho các giáo viên dạy bồi dưỡng và nghiên cứu. Nội dung cuốn sách bao gồm 11 chủ đề

Chủ đề 1: Hàm số
Chủ đề 2: Dãy số
Chủ đề 3: Phương trình và hệ phương trình đại số
Chủ đề 4: Phương trình lượng giác
Chủ đề 5: Đa thức
Chủ đề 6: Bài toán Lãi suất
Chủ đề 7: Các bài toán thực tiễn
Chủ đề 8: Số học
Chủ đề 9: Hình học phẳng
Chủ đề 10: Hình học không gian
Chủ đề 11: Ứng dụng MTCT tìm lời giải sáng tạo

Trong mỗi chủ đề, tác giả cung cấp và bổ sung nhiều kiến thức MTCT, kiến thức toán liên quan với nhiều ví dụ điển hình thường gặp được trích từ các đề thi HSG MTCT của các Sở Giáo dục những năm qua. Cuối mỗi chủ đề đều có các bài tập thực hành nhằm cũng cố lại kiến thức, rèn luyện khả năng tư duy, sáng tạo và đặc biệt tất cả bài tập đều có lời giải và đáp số.

Với cách viết khoa học và sinh động giúp các em học sinh tiếp cận với Môn giải toán với MTCT một cách hứng thú, trở nên tự tin, năng động, hiểu biết bản chất và biết định hướng phân tích để tìm lời giải cho nhiều lớp bài toán.

Mặc dù tác giả đã dành nhiều thời gian tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều không tránh khỏi. Chúng tôi rất mong được sự góp ý chân thành của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả
Trần Đình Cư

SƠ LƯỢC LỊCH SỬ HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN MÁY TÍNH CẦM TAY CASIO

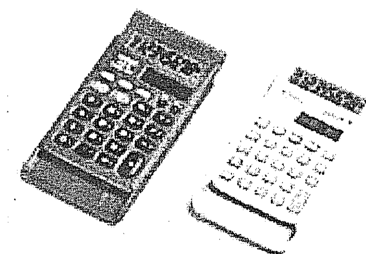
Casio là một nhà sản xuất hàng đầu về thiết bị điện tử, và được xem là một nhà tiên phong trong thị trường máy tính điện tử. Nó có các cơ sở sản xuất và tiếp thị trên khắp thế giới. Phiên bản đầu tiên của công ty có nguồn gốc từ Tokyo-Nhật Bản chỉ sau khi kết thúc chiến tranh thế giới thứ II, và chính thức được biết đến theo tên Casio vào năm 1975. Năm 1946, một doanh nhân Nhật Bản là Kashido Tadao đã mở một cửa hàng điện tử nhỏ tại Tokyo với mục đích là bộ phận sản xuất kính hiển vi. Như một cách mở rộng kinh doanh của mình, ông và anh trai mình phát minh ra một loại máy tính cơ khí mà đã trở thành tiền thân của máy tính điện tử hiện nay.

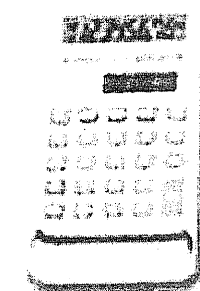
Mười một năm sau khi mở cửa hàng đầu tiên của mình, Tadao bắt đầu công ty máy tính Casio để xây dựng máy tính chuyển tiếp hoàn toàn bằng điện. Công ty bắt đầu mở rộng nhanh chóng và mở các văn phòng trên thế giới, và cuối cùng bước vào thị trường Hoa Kỳ năm 1967. Cuối năm đó, họ cho ra mắt máy tính điện tử để bàn được lập trình đầu tiên trên thế giới. Tháng 8 năm 1972 đánh dấu lần đầu tiên Casio bắt đầu tung ra thị trường Mini Casio, máy tính cầm tay đầu tiên trên thế giới. Sản phẩm này có thể đem theo bên mình và tính toán các con số nhanh chóng, thuận tiện và chính xác. Và do nhu cầu quá lớn mà Casio đã tăng gấp đôi sản xuất sau khi xuất xưởng lần đầu. Một năm sau đó, cổ phiếu Casio được niên yết và bán trên thị trường chứng khoáng Mỹ Exchange.

Trong những năm sau đó, Casio thêm vào dòng sản phẩm bổ sung, trong đó có máy tính tiền, nhạc cụ, đồng hồ đeo tay và từ điển điện tử. Casio vẫn là "một người chơi" mới trong thị trường máy tính, phát hành một máy tính kích thước bằng thẻ tín dụng mà có thể xử lý tốt văn bản. Trong thế kỉ XXI, Casio không ngừng phát triển mạnh mẽ. Một số sản phẩm khác đáng chú ý của nó bao gồm máy kĩ thuật số kiểu đồng hồ đeo tay, điện thoại di động đầu tiên có tích hợp máy ảnh kĩ thuật số và từ điển điện tử... Nó cũng bắt đầu hoạt động trong các khu vực mới như: Bắc Âu, Tây Ban Nha, Mỹ La Tinh và Mexico.

Năm 1992, các sách hướng dẫn giảng dạy trong trường học Nhật Bản có thay đổi, sách giáo khoa số học dành cho học sinh lớp 5 và lớp 6 bấy giờ yêu cầu HS sử dụng MTCT để giải quyết một số vấn đề, làm cho MTCT trở thành một công cụ mới trong dạy học. Ý tưởng đằng sau này là giúp HS phát triển và nắm chắc số học cơ bản ở những lớp thấp. Và sau đó, thông qua MTCT ở các lớp trên, sẽ cho phép các HS tiết kiệm thời gian làm các phép tính toán trên giấy, mà dành nhiều thời gian học tập các khái niệm và định lý...

Kể từ AZ-8 và SL-300LH (Hình 2.1) đã được giới thiệu trong các trường học như các thiết bị giảng dạy, hiển thị dấu thập phân đã thu hút một lượng lớn các HS nhỏ, và một hộp vỏ cứng bảo vệ bổ sung cùng với những tính năng đặc biệt.



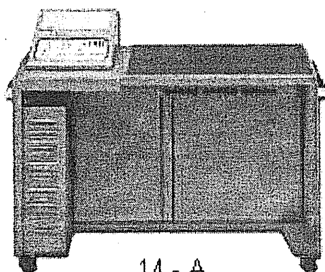


Hình 2.1

Năm 2002, chương trình giảng dạy ở Nhật Bản đã được sửa đổi lần nữa, và việc sử dụng MTCT đã được mở rộng để cho phép HS từ lớp 4 đã được bắt đầu sử dụng MTCT đáp ứng các yêu cầu toán học.

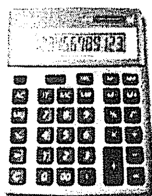
Trích lục

1. Máy tính Casio đầu tiên 1957 (Hình 2.2)



Hình 2.2

2. Mẫu máy tính bỏ túi Casio (Hình 2.3) dành kỉ niệm 55 năm thành lập (2012)



Hình 2.3

Ở Việt Nam, MTCT được biết đến rất sớm từ những năm 1980, nhưng do điều kiện kinh tế khó khăn nên rất ít người có MTCT. Theo Văn Như Cương (2000): "Việc sử dụng MTCT để giải quyết phép tính sai số, các phương trình và bất phương trình có hệ số thập phân, là rất phổ biến ở các nước, tuy nhiên ở nước ta không phải học sinh nào cũng có khả năng mua máy nên chỉ trông chờ vào các môn như Vật lý để học sinh có thể thực hành". Trải qua nhiều thay đổi của dòng MTCT, có thể liệt kê

ra một số MTCT được HS, GV dùng nhiều nhất đó là các máy tính của hãng Casio: $fx-95; fx-220; fx-500A; fx-500MS$; $fx-570MS; fx-500ES; fx-570ES$; $fx-500VN$ Plus; $fx-570ES$ Plus. Bên cạnh đó, Vinacal đã cho ra đời hai dòng MTBT phục vụ học tập cho HS có tính năng tương tự với hãng Casio đó là $Vn-500MS; Vn-570MS$ và tiếp đó tung ra một sản phẩm $Vn-570MS\ NEW$ bao gồm cả hai tính năng của $Vn-500MS; Vn-570MS$. Tính năng của máy tính bỏ túi $fx-500$ (bao gồm cả MS và ES) được sử dụng cho HS Trung học cơ sở và $fx-570$ (bao gồm cả MS và ES) được sử dụng cho HS THPT.

Theo công văn của Bộ Giáo dục và Đào tạo công bố danh sách MTCT được đem vào phòng thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2014 như sau:

- Về nguyên tắc: Theo quy chế tuyển sinh Đại học, Cao đẳng hệ chính quy, các máy tính cầm tay được phép mang vào phòng thi là các máy:
  - Không có chức năng soạn thảo văn bản (như tính năng ghi chép, ghi số điện thoại...)
  - Không có thẻ nhớ cắm thêm vào.
- Danh sách cụ thể các máy tính cầm tay thông dụng (làm được các phép tính số học, các phép tính lượng giác và các phép tính siêu việt) đáp ứng yêu cầu trên là :

  Casio: *fx* – 95, *fx* – 220, *fx* – 500A, *fx* – 500MS, *fx* – 500ES, *fx* – 500VN Plus, *fx* – 570 MS, *fx* – 570ES, *fx* – 570ES Plus; *fx* – 570ES VN Plus;

  Vinacal: *Vn*-500MS, *Vn*-570 MS, *Vn*-570MS New; *Vn*-570 ES Plus II

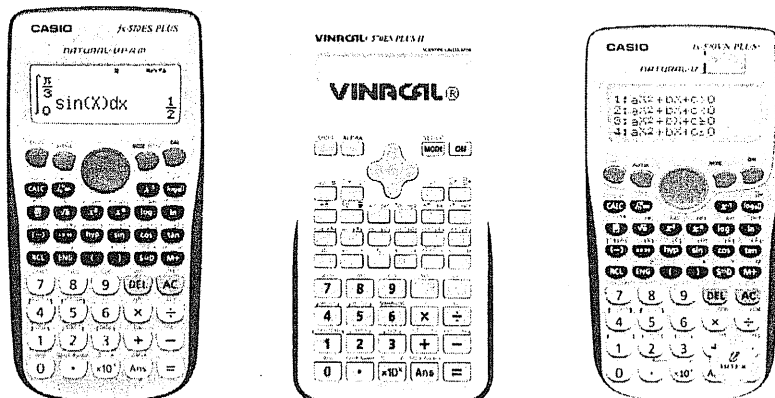
  Vietnam CaCulator: *VN*-500RS, *VN*-500 MS, *VN*-570 RS, *VN*-570ES;

  Sharp: *EL*-124A, *EL*-250S, *EL*-506W, *EL*-509WM;

  Canon: FC 45S, LS153TS, F720;

  Và các máy có tính năng tương đương.

Sau đây là ba loại máy tính bỏ túi (Hình 2.4) thông dụng nhất hiện nay tại Việt Nam mà học sinh, giáo viên dùng:



Hình 2.4

Chủ đề 1: HÀM SỐ

Dạng 1: GIỚI HẠN, ĐẠO HÀM, TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ

Phương pháp

1. Kiến thức máy tính cầm tay (MTCT)

1.1. Chức năng giải phương trình bậc 2:

Bước 1: Chọn chương trình giải phương trình bậc hai: [MODE] [5] [3]

Bước 2: Nhập các hệ số. Ấn [=] ta được nghiệm thứ nhất, ấn tiếp [=] ta được nghiệm thứ hai.

Ví dụ: Giải phương trình: $5x^2 + 3x - 9 = 0$.

Chọn chương trình giải phương trình bậc hai: [MODE] [5] [3]

Nhập các hệ số: [5] [=] [3] [=] [-] [9] [=]

Ấn [=] ta được nghiệm thứ nhất $x_1 = \frac{-3+3\sqrt{21}}{10}$

X1= Math▼

$\frac{-3+3\sqrt{21}}{10}$

Ấn [=] ta được nghiệm thứ hai $x_2 = \frac{-3-3\sqrt{21}}{10}$

X2= Math▼▲

$\frac{-3-3\sqrt{21}}{10}$

1.2. Chức năng giải phương trình bậc 3:

Bước 1: Chọn chương trình giải phương trình bậc ba: [MODE] [5] [4]

Bước 2: Nhập các hệ số. Ấn [=] ta được nghiệm thứ nhất, ấn tiếp [=] ta được nghiệm thứ hai.

Ví dụ: Giải phương trình: $5x^3 + 3x^3 - 9x + 12 = 0$.

Chọn chương trình giải phương trình bậc ba: [MODE] [5] [4]

Nhập các hệ số: [5] [=] [3] [=] [-] [9] [=] [1] [2] [=]

Ấn [=] ta được nghiệm thứ nhất của phương trình $x_1 \approx -2{,}049565613$

X1= Math▼

-2.049565613

Nghiệm thứ hai của phương trình là:

X2=
0.7247828064
+0.8035357597i

Nghiệm thứ ba của phương trình là:

X3=
0.7247828064
−0.8035357597i

Lưu ý: Nếu xét trên trường số thực, thì phương trình bậc ba có ba nghiệm. Ở ví dụ trên, nghiệm thứ nhất là nghiệm thực, hai nghiệm x_2, x_3 là nghiệm phức.

1.3. Chức năng tính giá trị hàm số tại một điểm

Bước 1: Nhập vào màn hình hàm số

Bước 2: Ấn [CALC], nhập giá trị x, ấn [=]

Ví dụ. Cho hàm số $y = f(x) = e^{3x+1} - 2x^2$. Tính giá trị $f(-3)$.

Nhập vào màn hình hàm số: $e^{3X+1} - 2X^2$ bằng cách:

[ALPHA] [×10^x] [$x^■$] [3] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [−] [2] [ALPHA] [)] [x^2]

Ấn [CALC], nhập [−] [3], ấn [=] ta được kết quả $f(-3) \approx -17,99966454$.

$e^{3X+1} - 2X^2$
-17.99966454

1.4. Chức năng tính tích phân:

Bước 1: Chọn chương trình tính tích phân: [∫▭]

Bước 2: Nhập vào hàm số và các cận, ấn phím [=] ta được kết quả

Ví dụ. Tính tích phân $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}.x^3dx$

Chọn chương trình tính tích phân: [∫▭]

Nhập vào màn hình: $\int_0^1 \sqrt{1+X^2}.X^3dx$ bằng cách

[√■] [1] [+] [ALPHA] [)] [x^2] [▶] [ALPHA] [)] [$x^■$] [3] [▶] [▶] [0] [▲] [1]

Ấn [=] ta được kết quả

$\int_0^1 \sqrt{1+X^2}\,X^3dx$

0.3218951416

1.5. Chức năng tính đạo hàm của hàm số tại một điểm

Bước 1: Chọn chức năng tính đạo hàm của hàm số tại 1 điểm: SHIFT ∫▭ $\left(\frac{d}{dx}\square\right)$

Bước 2: Nhập hàm số và nhập giá trị x_0, ấn =

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x^2+2}$ tại $x_0 = \sqrt{2}$.

Chọn chức năng tính đạo hàm của hàm số tại 1 điểm: SHIFT ∫▭

$\frac{d}{dx}(\square)\big|_{x=\square}$

Nhập vào màn hình $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3X^2+2}\right)\Big|_{x=\sqrt{2}}$ bằng cách:

√▭ 3 ALPHA) x^2 + 2 ▶ ▶ √▭ 2

Ấn = ta được kết quả: 1,5

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3X^2+2}\right)\Big|_{x=\sqrt{2}}$

1.5

1.6. Chức năng tính giới hạn của hàm số tại một điểm

Đối với MTCT Vinacal 570 ES Plus II thì có chức năng tính đạo hàm. Máy 570 VN Plus không có, tuy nhiên từ giới hạn của hàm số ta có thể chuyển qua đạo hàm. Tính giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ đôi lúc sẽ rất vất vả khi hàm số đã cho dưới dạng phức tạp. Nếu ta sử dụng công cụ MTCT kết hợp các phép biến đổi sơ cấp và tư duy toán học, thì việc giải một bài toán giới hạn trở nên dễ dàng hơn.

Từ đó ta có quy trình sau:

- *Bước 1:* Biến đổi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$;
- *Bước 2:*Sử dụng chương trình cài đặt sẵn của MTCT tính đạo hàm theo cú pháp sau:
  - SHIFT ∫▭ $\left(\frac{d}{dx}\square\right)$ màn hình hiển thị $\frac{d}{dx}(\square)\big|_{x=\square}$;
  - Nhập hàm số và giá trị x_0, sau đó bấm phím =.

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}}{x}$.

Hướng dẫn thực hành

Nhận thấy rằng đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Thông thường ta sẽ sử dụng phương pháp gọi "số hạng vắng"

Đặt $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}}{x}$. Ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-1+1-\sqrt[6]{2x+1}}{x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-1}{x}}_{A_1}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[6]{2x+1}}{x}}_{A_2}$$

Tính $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-1}{x}$. Đặt $y=\sqrt[5]{x+1}\Rightarrow x=y^5-1$. Lúc đó

$$A_1=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{1}{5}$$

Tính $A_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{2x+1}-1}{x}$. Đặt $z=\sqrt[6]{2x+1}\Rightarrow x=\dfrac{z^6-1}{2}$.

Lúc đó

$$A_2=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{2x+1}-1}{x}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{\frac{z^6-1}{2}}=\lim_{z\to 1}\frac{2}{z^5+z^4+z^3+z^2+z+1}=\frac{1}{3}.$$

Vậy $A=A_1-A_2=\dfrac{-2}{15}$.

Với MTCT, ta có thể giải theo cách sau:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\text{ với } f(x)=\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}.$$

Dùng MTCT ta dễ dàng tính được $f'(0)=\dfrac{-2}{15}$ như sau:

Chọn chương trình tính đạo hàm: SHIFT ∫□

Math

$\dfrac{d}{dx}(\square)\Big|_{x=\square}$

Nhập vào màn hình: $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}\right)\Big|_{x=0}$ bằng cách:

[5] [SHIFT] [$x^{■}$] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [−] [6] [SHIFT] [$x^{■}$] [2] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [▶] [0]

Ấn [=] ta được kết quả: -0,1333333333

$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{X+1}-\sqrt[6]{2X+1}\right.$ ▷

-0.1333333333

Để đổi kết quả -0,1333333333 sang phân số ta nhập: [−] [0] [·] [1] [ALPHA] [√■] [3]

Ấn [=] ta được kết quả: $-\frac{2}{15}$

-0.1(3)

$-\frac{2}{15}$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}}{x}=-\frac{2}{15}$

Lời giải và đáp số

Cách 1: Sử dụng kiến thức toán học

Đặt $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}}{x}$. Ta có:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-1+1-\sqrt[6]{2x+1}}{x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-1}{x}}_{A_1}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[6]{2x+1}}{x}}_{A_2}$$

Tính $A_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-1}{x}$. Đặt $y=\sqrt[5]{x+1}\Rightarrow x=y^5-1$. Lúc đó

$$A_1=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-1}{x}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^5-1}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^4+y^3+y^2+y+1}=\frac{1}{5}$$

Tính $A_2=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{2x+1}-1}{x}$. Đặt $z=\sqrt[6]{2x+1}\Rightarrow x=\frac{z^6-1}{2}$.

Lúc đó

$$A_2=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{2x+1}-1}{x}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{\frac{z^6-1}{2}}=\lim_{z\to 1}\frac{2}{z^5+z^4+z^3+z^2+z+1}=\frac{1}{3}.$$

Vậy $A=A_1-A_2=\frac{-2}{15}$.

Cách 2: Sử dụng kiến thức toán kết hợp MTCT

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}$

Ta có $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

Sử dụng MTCT tính được $f'(0)=-\dfrac{2}{15}$

Lời bình: Rõ ràng với công cụ MTCT, thay vì tính một giới hạn phức tạp, ta chuyển qua công đạo hàm là một cách làm tối ưu trên máy **570 VNPlus**. Đối với loại máy **Vinacal 570 ES Plus II** có thể tính trực tiếp giới hạn trên như sau:

Bước 1: Chọn chương trình tính giới hạn [SHIFT] [6] [5]

$\lim(\square)\big|_{x\to\square}$

Bước 2: Nhập vào màn hình: $\lim\left(\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[6]{2x+1}}{x}\right)\Bigg|_{x\to 0}$

Ấn [=] ta được kết quả -0,1333333333.

Để đổi kết quả -0,1333333333 sang phân số ta nhập: [=] [0] [•] [1] [ALPHA] [√■] [3]

Ấn [=] ta được kết quả: $-\dfrac{2}{15}$

Để nâng cao tư duy toán học và kĩ thuật sử dụng MTCT, hãy thử tính giới hạn sau: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{2x+1}}{\sqrt[3]{3x+8}-2\sqrt{x+1}}$.

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{2x+1}}{\sqrt[3]{3x+8}-2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{2x+1}}{x}}{\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2\sqrt{x+1}}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{2x+1}}{x-0}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{3x+8}-2\sqrt{x+1}}{x-0}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$$

Với $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[5]{2x+1};\quad g(x)=\sqrt[3]{3x+8}-2\sqrt{x+1}$.

Với công cụ MTCT, có thể dễ dàng (sau khi biết cách sử dụng như ở ví dụ trên) tính được $\dfrac{f'(0)}{g'(0)}=\dfrac{-\dfrac{1}{15}}{\dfrac{-3}{4}}=\dfrac{4}{45}$.

Ví dụ 2. Tính gần đúng giới hạn: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-\sqrt{x+3}-9+\sqrt{6}}{x-3}$.

(Trích đề thi HSGMTCT Toàn quốc năm 2008 – 12 THBT)

Hướng dẫn thực hành

Ta có:

$$L=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-\sqrt{x+3}-9+\sqrt{6}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}+\lim_{x\to 3}\frac{-\sqrt{x+3}+\sqrt{6}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)+\lim_{x\to 3}\frac{(-\sqrt{x+3}+\sqrt{6})'}{(x-3)'}=6+\frac{\lim\limits_{x\to 3}(-\sqrt{x+3}+\sqrt{6})'}{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)'}$$

Nhập vào máy: $6+\dfrac{\frac{d}{dx}\left(-\sqrt{x+3}+\sqrt{6}\right)_{|x=3}}{\frac{d}{dx}(x-3)_{|x=3}}$ bằng cách:

[6] [+] [□/□] [SHIFT] [∫□] [−] [√□] [ALPHA] [)] [+] [3] [▶] [+] [√□] [6] [▶] [▶] [3] [▼] [SHIFT] [∫□] [ALPHA] [)] [−] [3] [▶] [3]

Ấn [=] ta được kết quả: L=5,795875855

```
6+ ........                    Math
     d
    ---(X−3)|
    dx       x=3
          5.795875855
```

Đáp số: L=5,795875855.

Nhận xét: Ở ví dụ trên, ta có sử dụng quy tắc l'Hoopital (phát âm như Lô –pi-tan) là quy tắc sử dụng đạo hàm để tính các giới hạn có dạng vô định. Ứng dụng của quy tắc này là đưa dạng vô định trở thành dạng hữu hạn, cho phép tính toán giới hạn một cách dễ dàng.

Nội dung của quy tắc này như sau:

Giả sử c và L là các số thuộc tập số thực mở rộng (tức là bao gồm tập số thực và hai giá trị dương vô cùng và âm vô cùng).

Nếu $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}g(x)=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\pm\lim\limits_{x\to c}g(x)=\pm\infty$, và giả sử $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ thì $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$

Cụ thể ở trên: . $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-\sqrt{x+3}+\sqrt{6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(-\sqrt{x+3}+\sqrt{6})'}{(x-3)'}$

Ví dụ 3. Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{2\pi}{n}+\ldots+\cos\dfrac{n-1}{n}\pi\right)$

(Trích đề thi HSGMT ĐăkNông, THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Đặt $S_n = \frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{n-1}{n}\pi\right)$

Ta có: $S_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n-1}{n}\pi+...+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{0}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\pi\frac{i}{n}$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \cos\pi x dx$

Quy trình bấm phím như sau: (để máy ở chế độ Rad)

Ghi vào màn hình: $\int_0^1 \cos\pi x dx$ bằng cách:

[∫▭] [cos] [SHIFT] [x10^x] [ALPHA] [)] [)] [▶] [0] [▶] [1]

Bấm [=] ta được giá trị là 0.

$\int_0^1 \cos(\pi X)dx$

0

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \cos\pi x dx = 0$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{n-1}{n}\pi\right) = 0.$

Lời giải và đáp số

Đặt $S_n = \frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{n-1}{n}\pi\right)$

Ta có:

$S_n = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n-1}{n}\pi+...+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{0}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\cos\pi\frac{i}{n}$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \cos\pi x dx = 0.$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+...+\cos\frac{n-1}{n}\pi\right) = 0.$

Ví dụ 4. Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2x+6}-\sqrt[3]{x^3-x+27}}{x^3+x-2}$

(Trích đề thi HSGMTCT Kiên Giang, THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2x+6}-\sqrt[3]{x^3-x+27}}{x^3+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2x+6}-\sqrt[3]{x^3-x+27}}{(x-1)(x^2+x+2)}$$

$$=\frac{1}{4}f'(1)$$

với $f(x)=\sqrt{x^2+2x+6}-\sqrt[3]{x^3-x+27}$

Ghi vào màn hình: $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{X^2+2X+6}-\sqrt[3]{X^3-X+27}\right)\Big|_{x=1}$ bằng cách

SHIFT ∫ √ ALPHA) x² + 2 ALPHA) + 6 ▶ − SHIFT √ ALPHA) xⁿ 3 ▶ − ALPHA) + 2 7 ▶ ▶ 1

Bấm = ta được 0,5925925926

$\frac{d}{dx}(\sqrt{X^2+2X+6}-\sqrt[3]{X\triangleright}$

0.5925925926

ấn tiếp ÷ 4 = ta được kết quả 0,14814814581

Vậy $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+2x+6}-\sqrt[3]{x^3-x+27}}{x^3+x-2}$ =0,14814814581

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)=\sin 5x$. Tính $f^{(10)}(2015)$.

Hướng dẫn thực hành

Ta có

$$f'(x)=5\cos x=5\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=5^2\cos\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=5^2\sin\left(5x+\frac{2.\pi}{2}\right)$$

Dự đoán: $f^{(n)}(x)=5^n\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

Chứng minh dự đoán bằng quy nạp

Với $n=1$, hiển nhiên đúng

Giả sử dự đoán đúng với $n=k(k\ge 1)$, tức $f^k(x)=5^k\sin\left(5x+\frac{k\pi}{2}\right)$.

Ta có chứng minh dự đoán đúng với $n=k+1$, nghĩa là

$$f^{k+1}(x)=5^{k+1}\sin\left(5x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Thấy vậy:

$$f^{k+1}(x)=\left[f^{k}(x)\right]'=\left[5^{k}\sin\left(5x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]'=5^{k}.5\cos\left(5x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$=5^{k+1}\sin\left(5x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

Vậy $f^{(n)}(x)=5^{n}\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)$

Dùng MTCT tính được: $f^{(10)}(2015)$

```
5^10 sin(5×2015+1▷
-854764.7939
```

Đáp số: $f^{(10)}(2015)=-854764,7939$.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{2x+1}}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{2\sin x+1}}{\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\left(\sqrt{\sin x}-1\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$

Hướng dẫn thực hành

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{2x+1}}{x}=f'(0)$ với $f(x)=\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{2x+1}$

Dùng MTCT tính được $f'(0)$

b) Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{2\sin x+1}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt{2\sin x+1}\right)'}{(\sin x)'}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt{2\sin x+1}\right)'}{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)'}$$

Dùng máy tính tính $\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt{2\sin x+1}\right)\Big|_{x=0}}{\dfrac{d}{dx}\left(\sin x\right)\Big|_{x=0}}=-1$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\left(\sqrt{\sin x}-1\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ với

$f(x)=\sin x\left(\sqrt{\sin x}-1\right)$.

BT 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-7x-4}{x^2-5x+6}$. Tính $y^{(5)}(5)$.

Hướng dẫn thực hành

$y=2+\dfrac{3x-16}{(x-2)(x-3)}=2+\dfrac{A}{(x-2)}+\dfrac{B}{(x-3)}$.

Suy ra $3x-16=(A+B)x-(3A+2B)\Rightarrow A=10, B=-7$.

Do đó $y=2+\dfrac{10}{x-2}-\dfrac{7}{x-3}$.

Suy ra $y^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\times 7\times\dfrac{n!}{(x-3)^{n+1}}+(-1)^n\times 10\times\dfrac{n!}{(x-2)^{n+1}}$

Do đó: $y^{(5)}(5)=(-1)^6\times 7\times\dfrac{5!}{(5-3)^6}+(-1)^5\times 10\times\dfrac{5!}{(5-2)^6}$

Dùng MTCT ta tính được kết quả

```
                 Math ▲
(-1)^6×7×5!/(5-3)^6 ▷
            11.47890947
```

Vậy $y^{(5)}(5)=11,47890947$.

BT 3. Cho hàm số $f(x)=\sin^2 7x$. Tính chính xác $f^{(15)}(2015)$

Hướng dẫn thực hành

Ta có $y=\sin^2 7x=\dfrac{1-\cos 14x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\left(14x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$y'=\dfrac{1}{2}.10\cos\left(14x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}.10\sin\left(14x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)}(x)=(-1)^n.\frac{1}{2}.10^n\sin\left[14x-(n+1)\frac{\pi}{2}\right]$

Dùng MTCT tính $f^{(15)}(2015)$

```
-1×½×10^15 sin(1◂▸
4.988182376×10^14
```

Sử dụng tính toán tràn màn hình ta được: $f^{(15)}(2015)=498818237633871$.

BT 4. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^9 x}dx$.

Hướng dẫn thực hành

Ghi vào màn hình $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^9 x}dx$ bằng cách ấn các phím

[∫] [▭/▭] [1] [▼] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [$x^■$] [9] [▶] [▶] [▶] [▭/▭] [SHIFT] [$\times10^x$] [▼] [6] [▲] [▲] [▭/▭] [SHIFT] [$\times10^x$] [▼] [3]

Ấn [=] ta được kết quả

```
∫ π/6  1/(cos(X))^9 dX
38.7640451
```

Lời bình: Dùng phần mềm Maple ta tính được

$$>\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(\cos(x))^9}dx$$

$$-\frac{1235}{1728}-\frac{35}{256}\ln(3)+\frac{1451}{64}\sqrt{3}+\frac{35}{128}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Dùng MTCT ta kiểm tra lại thấy kết quả này trùng với kết quả giải trên MTCT.

Dạng 2. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

Một số lưu ý khi thực hành trên dạng toán này:

- Sử dụng lệnh [CALC] để tính giá trị hàm số tại 1 điểm.
- Sử dụng lệnh [SHIFT] [RCL] (STO) để lưu giá trị của một hàm số, lưu nghiệm của phương trình trong môi trường EQN {môi trường giải phương trình và hệ phương trình}
- Chuyển sang chế độ rad [SHIFT] [MODE] [4] nếu trong đề bài cho hàm số chứa các hàm lượng giác.
- Hiểu được giá trị biến nhớ tự động [Ans] {máy tự động lưu giá trị cuối cùng vào biến nhớ [Ans]}.

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Cho hai hàm số

$$f(x)=\sqrt[3]{\sin(2012x)-2013};\ g(x)=\tan\frac{\pi x}{2013}+\cos^2\left(e^{2x}-2012\right)$$

Tính a) $f\left(f\left(\sqrt{20,13}\right)\right)$; b) $f\left(g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)\right)$.

(Đề thi HSG MTCT Quảng trị 2013).

Hướng dẫn thực hành

Chuyển máy sang chế độ radian (rad): [SHIFT] [MODE] [4]

a) Để tính $f\left(f\left(\sqrt{20,13}\right)\right)$ ta ấn phím theo quy trình sau:

[√▫] [2] [0] [•] [1] [3] [=] {máy tự lưu kết quả này vào biến nhớ **ANS**}

Tính giá trị $f\left(\sqrt{20,13}\right)$ bằng cách:

[SHIFT] [√▫] [sin] [2] [0] [1] [2] [Ans] [)] [−] [2] [0] [1] [3] [=]
{máy tự lưu kết quả này vào biến nhớ **ANS**}.

```
M                 D    Math ▲
³√sin(2012Ans)-2▸
            -12.62848384
```

Ấn tiếp phím [=] để tính giá trị $f\left(f\left(\sqrt{20,13}\right)\right)$:

Ta được kết quả:

```
                  D    Math ▲
³√sin(2012Ans)-2▸
            -12.62511577
```

Do đó: $f\left(f\left(\sqrt{20,13}\right)\right) \approx -12,6251$.

b) Để tính $f\left(g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)\right)$ ta ấn phím theo quy trình sau:

[√■] [3] [=] {máy tự lưu kết quả này vào biến nhớ **ANS**}

Tính giá trị $f\left(\sqrt{3}\right)$ bằng cách:

[SHIFT] [√■] [sin] [2] [0] [1] [2] [Ans] [)] [−] [2] [0] [1] [3] [=]
{máy tự lưu kết quả này vào biến nhớ **ANS**}.

```
M              D        Math ▲
³√sin(2012Ans)-2▷
           -12.62803413
```

Tính $g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)$ bằng cách:

[tan] [▭/▭] [SHIFT] [×10ˣ] [Ans] [▼] [2] [0] [1] [3] [▶] [)] [+] [(] [cos] [ALPHA] [×10ˣ] [x■] [2] [Ans] [▶] [−] [2] [0] [1] [2] [)] [)] [x²] [=]
{máy tự lưu kết quả này vào biến nhớ **ANS**}

```
M              D        Math ▲
tan(πAns/2013)+(cos(▷
           0.01599226882
```

Tính giá trị $f\left(g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)\right)$ bằng cách:

[SHIFT] [√■] [sin] [2] [0] [1] [2] [Ans] [)] [−] [2] [0] [1] [3] [=]
Ta được kết quả:

```
               D        Math ▲
³√sin(2012Ans)-2▷
           -12.6250085
```

Vậy $f\left(g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)\right) \approx -12,6250$.

Lời giải và đáp số

a) Ta có

$f\left(\sqrt{20,13}\right) = -12,62848384$, $f\left(f\left(\sqrt{20,13}\right)\right) = -12,62511577$

Vậy, $f\left(f\left(\sqrt{20,13}\right)\right) \approx -12,6251$.

b) Ta có :

$f\left(\sqrt{3}\right) = -12,62803413;$

$g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right) = 0,01599226882$

$f\left(g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)\right) = -12,6250085$

Vậy $f\left(g\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)\right) \approx -12,6250.$

Ví dụ 2. Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+2x+3}} + \dfrac{3^{x+2}}{\log_2(x+1)}$

a) Tính $S = f(1) + f(2) + ... + f(10).$

b) Hãy tính giá trị gần đúng của $P = f(1) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{f(1)} + f'(3).$

(Đề thi HSG MTCT, Đồng tháp 2010)

Hướng dẫn thực hành

a) **Cách 1:** Sử dụng chức năng : [SHIFT] [log■□] $\left(\sum_{\square}^{\square}\square\right)$

Nhập vào màn hình: $\sum_{x=1}^{10}\dfrac{X\sqrt{X+1}}{\sqrt{X^2+2X+3}} + \dfrac{3^{X+2}}{\log_2(X+1)}$ bằng cách dãy phím:

[SHIFT] [log■□] [■/□] [ALPHA] [)] [√■] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [+] [2] [ALPHA] [)] [+] [3] [▶] [▶] [+] [■/□] [3] [x■] [ALPHA] [)] [+] [2] [▶] [▶] [log■□] [2] [▶] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [▶] [▶] [1] [▶] [1] [0] [=]

Ta được kết quả:

```
                 B        Math ▲
 10 (     X√X+1         3
 Σ   ─────────────── + ──▷
x=1 ( √X²+2X+3         10
              235852.8844
```

Cách 2: Sử dụng truy hồi

Đưa 0 vào ô nhớ A $\{0 \to A\}$ bằng cách: [0] [SHIFT] [RCL] [(−)] {biến đếm}

Đưa 0 vào ô nhớ B $\{0 \to B\}$ bằng cách: [0] [SHIFT] [RCL] [°'''] {biến tổng}

Nhập vào màn hình $A = A + 1 : C = \dfrac{A\sqrt{A+1}}{\sqrt{A^2+2A+3}} + \dfrac{3^{A+2}}{\log_2(A+1)} : B = C + B$

bằng cách ấn dãy phím:

[ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [□/□] [ALPHA] [(−)] [√□] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [▼] [√□] [ALPHA] [(−)] [x^2] [+] [2] [ALPHA] [(−)] [+] [3] [▶] [▶] [+] [□/□] [3] [$x^\blacksquare$] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [▶] [▶] [$\log_\blacksquare\square$] [2] [▶] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [▶] [▶] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [ALPHA] [°'''] [CALC]

Lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi $A = 10$:

```
A=A+1
                10
```

Ta được kết quả:

```
B=C+B
       235852.8844
```

Vậy $S = 235852,8844$.

b) Sử dụng chức năng [CALC] để tính $f(1)$ như sau:

Nhập vào màn hình hàm số $\frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+2x+3}} + \frac{3^{x+2}}{\log_2(x+1)}$ bằng cách

[□/□] [ALPHA] [)] [√□] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [√□] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [2] [ALPHA] [)] [+] [3] [▶] [▶] [+] [□/□] [3] [$x^\blacksquare$] [ALPHA] [)] [+] [2] [▼] [$\log_\blacksquare\square$] [2] [▶] [ALPHA] [)] [+] [1]

Ấn tiếp phím [CALC] máy yêu cầu nhập giá trị X ta ấn [1] [=]

Ta được kết quả:

```
√X²+2X+3 + log₂(X
            81+√3
            -----
              3
```

Lưu giá trị này vào biến nhớ A bằng cách [SHIFT] [RCL] [(−)].

Để tính $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{f(1)}$ ta làm như sau:

[(] [□/□] [1] [▼] [√□] [2] [▶] [▶] [)] [$x^\blacksquare$] [ALPHA] [(−)] [=] {tức $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^A$ } và lưu kết quả này vào biến nhớ B bằng cách [SHIFT] [RCL] [°''']

```
Ans→B
    7.066350644×10⁻⁵
```

Sử dụng chức năng đạo hàm SHIFT $\int_\square^\square$ $\left(\frac{d}{dx}\square\right)$ để tính $f'(3)$ như sau:

SHIFT $\int_\square^\square$ $\frac{\square}{\square}$ ALPHA) $\sqrt{\square}$ ALPHA) + 1 ▼ $\sqrt{\square}$ ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) + 3 ▶ ▶ + $\frac{\square}{\square}$ 3 $x^\square$ ALPHA) + 2 ▼ $\log_\square\square$ 2 ▶ ALPHA) + 1 ▶ ▶ ▶ 3 =

Ta được kết quả và lưu kết quả này vào biến nhớ C bằng cách ấn SHIFT RCL hyp

```
Ans→C
                111.9043737
```

Để tính giá trị: $P = f(1) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{f(1)} + f'(3)$ ta ấn:

AC ALPHA (−) + ALPHA °''' + ALPHA hyp = ta được kết quả sau:

```
A+B+C
                139.4817946
```

Vậy $P = 139,4817946$.

Lời giải và đáp số

a) Sử dụng chức năng $\sum_\square^\square \square$ hoặc lập trình gán thêm biến đếm và biến tổng ta tính được: $S = 235852,8844$.

b) Tính

$$f(1) = \frac{81+\sqrt{3}}{3} \to A; \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{f(1)} = 7,066350644\text{x}10^{-5} \to B$$

$f'(3) = 111,9043737$.

Suy ra: $P = f(1) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{f(1)} + f'(3) = A + B + C = 139,4817946$

Vậy $P \approx 139,4818$.

Ví dụ 3. Cho hai hàm số $f(x) = 2.\frac{\sqrt{\log(x^2+1)+3}}{2^{\log x}+1}$

a) Tính $f(x)$ khi $x = 1; 2; 3$ và tính tổng $f(1) + f(2) + f(3)$.

b) Viết quy trình bấm phím trên máy tính và tính giá trị của

$$S = f(1) + f(2) + ... + f(100).$$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Bộ GD 2013).

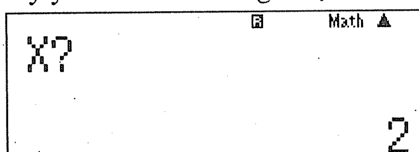
Hướng dẫn thực hành

a) Sử dụng chức năng CALC để tính các giá trị f(1); f(2); f(3).

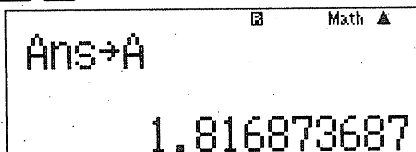
Nhập vào màn hình hàm số: $f(x) = 2\frac{\sqrt{\log(x^2+1)+3}}{2^{\log x}+1}$ bằng cách

2 × ⬚/⬚ √ log ALPHA) x² + 1) + 3 ▼ 2 x■ log ALPHA)) + 1

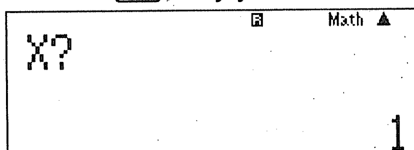
Ấn tiếp phím CALC, máy yêu cầu khai báo giá trị X.



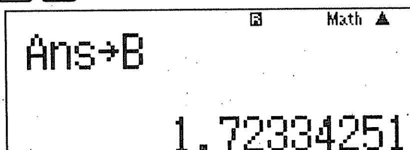
Ấn 1 = ta được kết quả của $f(1)$ và lưu kết quả này vào biến nhớ A bằng cách ấn tiếp phím SHIFT RCL (−)



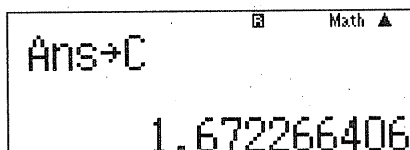
Nhập lại hàm số ban đầu. Ấn CALC, máy yêu cầu khai báo giá trị X



Ấn 2 = ta được kết quả của $f(2)$ và lưu kết quả này vào biến nhớ B bằng cách ấn tiếp phím SHIFT RCL °'''



Tương tự ta tính được giá trị $f(3)$ và lưu vào biến nhớ C bằng cách SHIFT RCL hyp



Để tính $f(1)+f(2)+f(3)$ ta ghi vào màn hình: $A+B+C$ bằng cách:

ALPHA (–) + ALPHA °''' + ALPHA hyp

Ấn tiếp phím = ta được kết quả:

A+B+C
5.212482603

Vậy $f(1)+f(2)+f(3)\approx 5,2125$

b) Để tính $S=f(1)+f(2)+...+f(100)$ ta sử dụng chức năng SHIFT $\log_{\square}\square$ $\left(\sum_{\square}^{\square}\square\right)$

Khai báo: $\sum_{x=1}^{100} 2.\frac{\sqrt{\log\left(x^2+1\right)+3}}{2^{\log x}+1}$ bằng cách:

SHIFT $\log_{\square}\square$ 2 × $\frac{\square}{\square}$ √▫ log ALPHA) x^2 + 1) + 3 ▼ 2 $x^{\blacksquare}$ log ALPHA)) ▶ + 1 ▶ ▶ 1 ▲ 1 0 0

Ấn tiếp phím = ta được kết quả:

$\sum_{x=1}^{100}\left(2\times\frac{\sqrt{\log(X^2+1}}{2^{\log(X)}+}\right.$
123.9469195

Vậy $S\approx 123,9469$.

Lời giải và đáp số

a) Ta có

$f(1)=1,816873687\to A$
$f(2)=1,72334251\to B$
$f(3)=1,672266406\to C$

Suy ra: $f(1)+f(2)+f(3)=A+B+C=5,212482603$.

Vậy $f(1)+f(2)+f(3)\approx 5,2125$.

b) Sử dụng chức năng SHIFT $\log_{\square}\square$ $\left(\sum_{\square}^{\square}\square\right)$ để tính tổng $\sum_{x=1}^{100} 2.\frac{\sqrt{\log\left(x^2+1\right)+3}}{2^{\log x}+1}$

ta được $S=f(1)+f(2)+...+f(100)=123,9469195$

Vậy $S\approx 123,9469$.

Ví dụ 4. Tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = 0,75$, biết

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{2^{x^2} + \sin^3 x + \cos^3 x}}{\log_2\left(\tan\left(e^{-2x} + 1\right) + x\sqrt{x} + 1\right)}$$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Huế 2009).

Hướng dẫn thực hành

Chuyển máy về chế độ rad: SHIFT MODE 4

Sử dụng chức năng CALC để tính giá trị hàm số $f(0.75)$

Nhập vào màn hình hàm số $\frac{\sqrt[3]{2^{x^2} + \sin^3 x + \cos^3 x}}{\log_2\left(\tan\left(e^{-2x} + 1\right) + x\sqrt{x} + 1\right)}$ bằng cách

▭ SHIFT √▭ 2 x▭ ALPHA) x² ▶ + (sin ALPHA))) x▭ 3 ▶ + (cos ALPHA))) x▭ 3 ▶ ▶ ▶ log▭▯ 2 ▶ tan ALPHA ×10ˣ x▭ − 2 ALPHA) ▶ + 1) + ALPHA) √▭ ALPHA) ▶ + 1

Tiếp tục ấn CALC 0 • 7 5 = {tính giá trị hàm số tại $x = 0,75$ }

Ta được kết quả:

```
                 D        Math ▲
 ∛2X² +(sin(X))³
 ─────────────────▷
 log₂(tan(e⁻²ˣ+
          0.6062640195
```

Vậy $f(0,75) \approx 0,6063$.

Lời giải và đáp số

Chuyển máy về đơn vị đo rad.

Dùng chức năng CALC để tính giá tính giá trị hàm số

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{2^{x^2} + \sin^3 x + \cos^3 x}}{\log_2\left(\tan\left(e^{-2x} + 1\right) + x\sqrt{x} + 1\right)} \text{ tại } x = 0,75$$

Đáp số $f(0,75) \approx 0,6063$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x^2 + 2x + \ln(x+1)}}$

a) Tính giá trị gần đúng của $f(f(f(f(f(1)))))$.

b) Tính giá trị gần đúng của

$$S = f'(1) + f'\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{4}\right) + \cdots + f'\left(\frac{1}{10}\right).$$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Cần Thơ 2013).

Hướng dẫn thực hành

a) **Cách 1:** Sử dụng biến đếm và phép gán

Đưa 0 vào biến nhớ D $\{0 \to D\}$ bằng cách [0] [SHIFT] [RCL] [sin] {biến đếm}

Đưa 1 vào biến nhớ A $\{1 \to A\}$ bằng cách [1] [SHIFT] [RCL] [(–)] {giá trị $x_0 = 1$ }

Nhập vào màn hình: $D = D + 1 : B = \dfrac{e^{\sqrt[3]{A}}}{\sqrt{A^2 + 2A + \ln(A+1)}} : A = B$ bằng cách

[AC] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [□/□] [ALPHA] [x10ˣ]
[x■] [SHIFT] [√□] [ALPHA] [(–)] [▶] [▶] [▶] [▶] [√□] [ALPHA] [(–)] [x²] [+] [2] [ALPHA] [(–)] [▶] [+] [ln] [ALPHA] [(–)]
[+] [1] [)] [▶] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [(–)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [°''']

Ấn phím [CALC] và lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi $D = 5$

```
                    Math ▲Disp
D=D+1

                             5
```

Ta được kết quả $f\left(f\left(f\left(f\left(f(1)\right)\right)\right)\right)$

```
                    Math ▲Disp
          e^(∛A)
B=─────────────────────── ▷
  √(A²+2A+ln(A+1
           1.088915272
```

Vậy $f\left(f\left(f\left(f\left(f(1)\right)\right)\right)\right) \approx 1,0889$.

Cách 2: Có thể nhập trực tiếp biểu thức: $\dfrac{e^{\sqrt[3]{X}}}{\sqrt{X^2 + 2X + \ln(X+1)}}$ và dùng chức năng của các phím [CALC] và phím [Ans] {máy tự động lưu kết quả sau cùng vào biến nhớ [Ans] } để tính.

b) Tính giá trị gần đúng của $S = f'(1) + f'\left(\dfrac{1}{2}\right) + f'\left(\dfrac{1}{3}\right) + f'\left(\dfrac{1}{4}\right) + \cdots + f'\left(\dfrac{1}{10}\right)$.

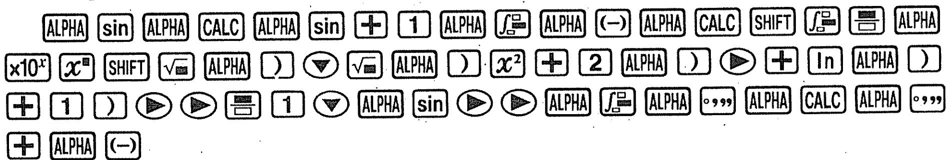
Đưa 0 vào biến nhớ D $\{0 \to D\}$ bằng cách [0] [SHIFT] [RCL] [sin] {biến đếm}

Đưa 0 vào biến nhớ B $\{0 \to B\}$ bằng cách [0] [SHIFT] [RCL] [(–)] {biến tổng}

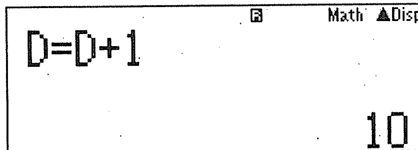
Nhập vào màn hình biểu thức

$$D = D + 1 : A = \frac{d}{dX}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{X}}}{\sqrt{X^2 + 2X + \ln(X+1)}}\right)\Bigg|_{X=\frac{1}{D}} : B = B + A$$

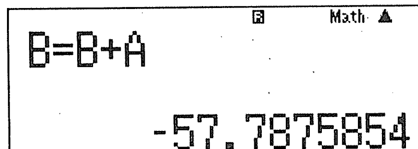
Bằng cách:



Ấn CALC và lặp lại liên tiếp phím bằng cho đến khi $D = 10$



ta được kết quả gần đúng của S là



Vậy $S \approx -57,7876$.

Lời giải và đáp số

a) Thực hiện phép gán:

$0 \to D$ {biến đếm}

$1 \to A$

Nhập vào màn hình: $D = D + 1 : B = \dfrac{e^{\sqrt[3]{A}}}{\sqrt{A^2 + 2A + \ln(A+1)}} : A = B$

Ấn phím CALC và lặp lại liên tiếp phím = cho đến khi $D = 5$

Ta được kết quả $f\left(f\left(f\left(f\left(f(1)\right)\right)\right)\right) \approx 1,0889$.

b) Thực hiện phép gán:

$0 \to D$ {biến đếm}

$0 \to B$ {biến tổng}

$$D = D + 1 : A = \frac{d}{dX}\left(\frac{e^{\sqrt[3]{X}}}{\sqrt{X^2 + 2X + \ln(X+1)}}\right)\Bigg|_{X=\frac{1}{D}} : B = B + A$$

Ấn CALC và lặp lại liên tiếp phím bằng cho đến khi $D = 10$

Ta được kết quả gần đúng của S là $S \approx -57,7876$.

Ví dụ 6. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số

$$y = x^2 + 7x - 5 \text{ và } y = \frac{8x^2 + 9x - 11}{x + 1}$$

(Đề thi HSGMT Toàn quốc năm 2009, Lớp 12 THPT)

Lời giải và đáp số

Tọa độ giao điểm của đồ thị hai hàm số là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^2 + 7x - 5 \\ y = \dfrac{8x^2 + 9x - 11}{x + 1} \end{cases} \Rightarrow x^2 + 7x - 5 = \frac{8x^2 + 9x - 11}{x + 1}$$

Ghi vào màn hình: $X^2 + 7X - 5 = \dfrac{8X^2 + 9X - 11}{X + 1}$

Ấn SHIFT CALC nhập 0 ấn = Kết quả: 1

```
X²+7X-5=…/X+1 ▷
X=                1
L-R=              0
```

Ấn SHIFT CALC nhập 1 0 ấn = Kết quả: 2

```
Solve for X

                  2
```

Ấn SHIFT CALC nhập − 1 0 ấn = Kết quả: -3

```
X²+7X-5=…/X+1 ▷
X=               -3
L-R=              0
```

Ghi vào màn hình: $X^2 + 7X - 5$

Ấn CALC nhập − 3 ấn = Kết quả: -17

Ấn CALC nhập 1 ấn = Kết quả: 3

Ấn CALC nhập 2 ấn = Kết quả: 13

Vậy tọa độ các giao điểm là: (-3;-17),(1;3),(2;13).

Ví dụ 7. Trong các số:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{13}};\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{8}\right);\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{11}};-\frac{2006}{669};\frac{2007}{1338};-\frac{2008}{2007};\frac{2009}{2676}$$

Hãy chỉ ra những số làm cho biểu thức: $F = 3.25^{x+1} - 125.15^{x} + 5.9^{x+1}$ nhận giá trị không dương.

Hướng dẫn thực hành

Nhập vào màn hình: $3\times 25^{X+1}-125\times 15^{X}+5\times 9^{X+1}$

Ấn [CALC] nhập $\left(\sqrt{(5)}+\sqrt{(3)}\right)\div\sqrt{(13)}$ ấn . Kết quả $634,9054922>0$.

Ấn [CALC] nhập $\tan\left(\frac{\pi}{7}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ấn [=]. Kết quả $248,8128406>0$

Ấn [CALC] nhập $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ ấn . Kết quả 391,5237189

Ấn [CALC] nhập $-\frac{2006}{669}$ ấn [=]. Kết 0,02956735283

Ấn [CALC] nhập $\frac{2007}{1338}$ ấn [=] . Kết quả 3328,156226

Ấn [CALC] nhập $\frac{-2008}{2007}$ ấn [=] . Kết quả -0,3323752528

Ấn nhập $\frac{2009}{2676}$ ấn [=] . Kết quả 120,0771745

$$3\times25^{X+1}-125\times15^{X}$$
120.0771745

Vậy chỉ có $-\frac{2008}{2007}$ là thỏa giá trị đề bài.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Cho hai hàm số

$$f(x)=\frac{\tan\left(\sqrt{2^{x^2}+x^4}\right)-\sin^2(3x+2012)+2012}{\log_2^2\left(5x^6+\sqrt[9]{7+\cos x}\right)}$$

Tính $f(x_i)$ với x_i là nghiệm của phương trình $\sqrt{2}x^3-2x^2-\sqrt{3}x+1=0$.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Quảng trị 2012)

Hướng dẫn thực hành

Trước hết ta sử dụng chương trình giải phương trình bậc 3: [MODE] [5] [4] để tìm các nghiệm x_i của phương trình $\sqrt{2}x^3-2x^2-\sqrt{3}x+1=0$

Nghiệm thứ nhất: $x_1\approx1,867308426$. Đưa $x_1\to A$

Nghiệm thứ nhất: $x_2\approx0,4291969957$. Đưa $x_2\to B$

Nghiệm thứ nhất: $x_3=-0,8822918591$. Đưa $x_3\to C$

Đưa máy về chế độ tính toán thông thường: [MODE] [1]

Để tìm các giá trị của $f(x_i)$ ta sử dụng chức năng [CALC]

Trước hết ta cần chuyển máy về chế độ rad: [SHIFT] [MODE] [4]

Nhập vào màn hình hàm số: $f(x)=\frac{\tan\left(\sqrt{2^{x^2}+x^4}\right)-\sin^2(3x+2012)+2012}{\log_2^2\left(5x^6+\sqrt[9]{7+\cos x}\right)}$

và [CALC] các giá trị A,B,C ta sẽ được kết quả

Đáp số: $f(x_{11})\approx33,4756$; $f(x_2)=14958,5563$; $f(x_3)\approx592,0105$.

BT 2. Cho hàm số $f(x)=\frac{2^{\sqrt{x}}}{6\log_3x+\sqrt{3}}$.

Tính tổng $S=f(\sqrt{1})+f(\sqrt{2})+...+f(\sqrt{100})$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Huế 2008).

Hướng dẫn thực hành

Cách 1: Sử dụng biến đếm và lặp

$0 \to D$ {biến điếm}; $0 \to B$ {biến tổng}

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : B = B + \dfrac{\sqrt{D^3}}{6\sqrt[3]{\sqrt{D}} + \sqrt{3}}$

Ấn CALC và lặp lại liên tiếp phím = cho đến khi $D = 10$ thì dừng, ta được kết quả $S \approx 2931,7895$

Cách 2: Sử dụng phím tổng $\sum$

Nhập vào màn hình: $\displaystyle\sum_{X=1}^{100} \frac{\sqrt{X^3}}{6\sqrt[3]{\sqrt{X}} + \sqrt{3}}$ ta được kết quả $S \approx 2931,7895$.

BT 3. Cho hai hàm số $f(x) = 4^x\left(4^x + 2\right)^{-1}$.

Hãy tính tổng : $S = f\left(\dfrac{1}{2010}\right) + f\left(\dfrac{2}{2010}\right) + f\left(\dfrac{3}{2010}\right) + \ldots + f\left(\dfrac{2009}{2010}\right)$.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Bộ GD 2010).

Hướng dẫn thực hành

Sử dụng công thức: $f(x) + f(1 - x) = 1$

$$S = f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(\frac{3}{2010}\right) + \ldots + f\left(\frac{2009}{2010}\right)$$
$$= \left[f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2009}{2010}\right)\right] + \ldots + \left[f\left(\frac{1004}{2010}\right) + f\left(\frac{1006}{2010}\right)\right] + f\left(\frac{1005}{2010}\right)$$

Do đó: $S = 1004.1 + 0,5 = 1004,5$.

BT 4. Tính giá trị gần đúng của hàm số sau tại $x = \sqrt[4]{10}$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x + 5} - 2\sin x}{\ln\left(x^2 + \sqrt{x} + 4\right) + \cos 3x}$$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Phú Yên 2010).

Hướng dẫn thực hành

Chuyển sang chế độ rad: SHIFT MODE 4

Nhập biểu thức: $\dfrac{\sqrt[3]{X^3 + 2X + 5} - 2\sin(X)}{\ln\left(X^2 + \sqrt{X} + 4\right) + \cos(3X)}$

Sử dụng chức năng CALC gọi giá trị của $f(x)$ tại $x = \sqrt[4]{10}$.

Ta được kết quả $f(x) \approx 0,1702$

Math ▲

$\dfrac{\sqrt[3]{X^3+2X+5}-2\sin\ldots}{\ln(X^2+\sqrt{X}+4)+\cos\ldots}$

0.170175990 2

BT 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+1}; g(x)=\dfrac{2\sin x}{1+\cos^4 x}$. Hãy tính giá trị của hàm hợp $g(f(x))$ và $f(g(x))$ tại $x=\sqrt[6]{261220086}$

(Trích đề thi HSGMTCT Vũng Tàu 26/12/2008)

Hướng dẫn thực hành

Đưa $\sqrt[6]{261220086} \rightarrow X$ bằng cách:

[6] [SHIFT] [$x^{■}$] [2] [6] [1] [2] [2] [0] [0] [8] [6] [SHIFT] [RCL] [)]

* Tính: $g(f(x))$

Ghi vào màn hình: $\dfrac{2X^2+3X-5}{X^2+1}$ Ấn [CALC] [ALPHA] [)] [=]

Math ▲

$\dfrac{2X^2+3X-5}{X^2+1}$

2.10753661

Ghi vào màn hình: $\dfrac{2\sin(Ans)}{1+(\cos(Ans))^4}$ Ấn [=] ta được kết quả:

Math ▲

$\dfrac{2\sin(Ans)}{1+(\cos(Ans))^4}$

1.608777005

Vậy $g(f(x)) = 1,608777005$

* Tương tự ta tính $f(g(x)) = -0,604252173$.

BT 6. Tính giá trị của biểu thức sau với $x=\sqrt[6]{26122008}$

$$A=\frac{x^{2010}+x^{2008}+x^{2006}+\ldots+x^2+1}{x^{2008}+x^{2004}+x^{2000}+\ldots+x^4+1}$$

(Trích đề thi HSGMTCT Vũng Tàu 26/12/2008)

Hướng dẫn thực hành

Ta thấy: Tử số là tổng của 2010÷2+1=1006 số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1, công bội là x^2

$\Rightarrow$ Tử số bằng $\dfrac{1-x^{2.1006}}{1-x^2}=\dfrac{1-x^{2012}}{1-x^2}$

Mẫu số là tổng của 2008÷ 4+1=503 số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1, công bội là x^4

$\Rightarrow$ Mẫu số bằng $\dfrac{1-x^{4.503}}{1-x^4}=\dfrac{1-x^{2012}}{1-x^4}$

$\Rightarrow A=\dfrac{1-x^{2012}}{1-x^2}.\dfrac{1-x^4}{1-x^{2012}}=\dfrac{1-x^4}{1-x^2}$

Sử dụng máy tính tính A tại giá trị $x=\sqrt[6]{26122008}$

Kết quả: A = 297,712279.

BT 7. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. Tính tổng $S=f(1)+f(3)+f(5)+...+f(99)$

(Trích đề thi chọn đội tuyển HSGMTCT TP. Hồ Chí Minh 2008-2009 THPT)

Hướng dẫn thực hành

Cách 1:

Nhớ -1 vào A: [−] [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Nhớ 0 vào B (biến tính S): [0] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Nhập vào máy: $A=A+1:B=B+\dfrac{\sqrt{A}}{A+1}$

Ấn [=]...[=] cho đến khi A=99, ấn [=] ta được B=8,566586317

Vậy S=8,566586317.

Cách 2: Ta có: f(2x-1)..

$$S=\sum_{x=1}^{50}f(2x-1)=\sum_{x=1}^{50}\frac{\sqrt{2x-1}}{2x}$$

Nhập vào máy biểu thức (ở chế độ LineIO): $\sum_{x=1}^{50}\dfrac{\sqrt{2X-1}}{2X}$

Ấn [=] ta được S=8,566586317.

Dạng 3: BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ

Phương pháp

1. Kiến thức MTCT

- Biết cách sử dụng chức năng giải phương trình bậc hai, bậc ba
- Biết cách lưu nghiệm trực tiếp trong môi trường **EQN**
- Biết cách sử dụng chức năng [CALC] tính giá trị của hàm số tại một điểm
- Biết cách lưu một giá trị [SHIFT] [RCL] và gọi lại giá trị [ALPHA]
- Đối với hàm lượng giác, biết cách chuyển đổi qua giá đơn vị đo góc là độ [SHIFT] [MODE] [3] và đơn vị rad [SHIFT] [MODE] [4].

2. Kiến thức toán liên quan

Để tìm các cực trị hàm số ta thường sử dụng một trong hai quy tắc sau

QUY TẮC 1

- Tìm $f'(x)$.
- Tìm các điểm $x_i\left(i=1,2,...\right)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

QUY TẮC 2

- Tính $f'(x)$.
- Tìm các nghiệm $x_i\left(i=1,2,...\right)$ của phương trình $f'(x)=0$
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$
  - Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_i.
  - Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i.

Chú ý

- Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
- Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm f không đạt cực trị tại điểm x_0.

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2013}-1}$.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Quảng trị 2013).

Hướng dẫn thực hành

Ta có:

$$y' = \frac{2013-\sqrt{x^2+2013}}{\sqrt{x^2+2013}\left(\sqrt{x^2+2013}+1\right)^2},$$

$y'=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4050156}$. Đặt $x_1=-\sqrt{4050156}$, $x_2=\sqrt{4050156}$

Lưu x_1 vào biến nhớ A $\{x_1 \to A\}$ bằng cách:

[−] [√■] [4] [0] [5] [0] [1] [5] [6] [SHIFT] [RCL] [(−)]

D Math ▲
$-\sqrt{4050156}\to A$
-2012.499938

Lưu x_2 vào biến nhớ B $\{x_2 \to B\}$ bằng cách:

[√■] [4] [0] [5] [0] [1] [5] [6] [SHIFT] [RCL] [°'"]

D Math ▲
$\sqrt{4050156}\to B$
2012.499938

Sử dụng chức năng [CALC] để tính giá trị của hàm số tại x_1, x_2.

Nhập vào màn hình $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2013}-1}$ bằng cách:

[■/■] [ALPHA] [)] [▼] [√■] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [2] [0] [1] [3] [▶] [−] [1]

Ấn [CALC] [ALPHA] [(−)] [=] { tính giá trị $f(x_1)$ }, lưu giá trị này vào biến nhớ C bằng cách [SHIFT] [RCL] [hyp]

D Math ▲
Ans→C
-1.000248478

Ấn [▲] để trở lại hàm số ban đầu, ấn [CALC] [ALPHA] [°'"] [=] và lưu giá trị này vào biến nhớ D bằng cách [SHIFT] [RCL] [sin]

D Math ▲
Ans→D
1.000248478

Để tính khoảng cách hai cực trị.. $d=\sqrt{(B-A)^2+(D-C)^2}$ ..ta nhập vào màn hình:

[√■] [(] [ALPHA] [°'"] [−] [ALPHA] [(−)] [)] [x^2] [+] [(] [ALPHA] [sin] [−] [ALPHA] [hyp] [)] [x^2] [=]

Ta được kết quả:

M Math ▲
$\sqrt{(B-A)^2+(D-C)^2}$
4025.000373

Vậy $d \approx 4025,0004$.

Lời giải và đáp số

Ta có : $y' = \dfrac{2013 - \sqrt{x^2+2013}}{\sqrt{x^2+2013}.\left(\sqrt{x^2+2013}-1\right)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2013} = 2013 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{4050156} \to A \\ x_2 = \sqrt{4050156} \to B \end{array}\right.$

Sử dụng chức năng CALC tính các giá trị.

$f(x_1) = -1,000248478 \to C;\ f(x_2) = 1,000248478 \to D$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		A		B		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y		↘	C	↗	D	↘	

Khoảng cách hai cực trị $d = \sqrt{(B-A)^2 + (D-C)^2} \approx 4025,0004$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) đi qua ba điểm $A(2;-7), B(1;-5), C(-1;-13)$.

a) Tính các giá trị a, b, c.

b) Tính khoảng cách giữa các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số chính xác đến 9 chữ số thập phân.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Bộ Giáo dục 2012).

Hướng dẫn thực hành

a) Ta có

$A(2;-7) \in (C)$ nên: $4a + 2b + c = -15$

$B(1;-5) \in (C)$ nên: $a + b + c = -6$

$C(-1;-13) \in (C)$ nên: $a - b + c = -12$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4a+2b+c=-15 \\ a+b+c=-6 \\ a-b+c=-12 \end{cases}$ bằng cách:

Chọn chế độ giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn: MODE 5 2

Nhập các hệ số:

4 = 2 = 1 = − 1 5 = 1 = 1 = 1 = − 6 = 1 = − 1 = 1 = − 1 2 =

Ta được nghiệm của hệ:

Nghiệm X tương ứng với a,

X= -4

Nghiệm Y tương ứng với b,

Y= 3

Nghiệm Z tương ứng với c.

Z= -5

Ta được: $a=-4,\ b=3,\ c=-5$. Vậy ta được hàm số sau: $y=x^3-4x^2+3x-5$.

b) Ta có: $y'=3x^2-8x+3$.

Để giải $y'=0$ ta ấn phím như sau:

Chọn chế độ giải phương trình bậc hai:

MODE 5 3

Nhập các hệ số: MODE 5 3 3 = − 8 = 3 = =

Ta được các nghiệm của phương trình là

$X_1=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$	$X_2=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$

Lưu nghiệm thứ nhất vào biến nhớ A bằng cách SHIFT RCL (−)

Lưu nghiệm thứ hai vào ô nhớ B bằng cách SHIFT RCL °'''

Sử dụng chức năng CALC để tính các giá trị $f(x_1)$ và $f(x_2)$ như sau:

Nhập vào màn hình: $x^3 - 4x^2 + 3x - 5$ bằng cách:

ALPHA) $x^{■}$ 3 ▶ − 4 ALPHA) x^2 + 3 ALPHA) − 5

Ấn CALC ALPHA (−) = {tính giá trị $f(x_1)$} và lưu kết quả này vào biến nhớ C bằng cách SHIFT RCL hyp

```
Ans→C
        -7.112611791
```

Ấn ▲ quay lại hàm số ban đầu, ta nhập CALC ALPHA °,,, = {tính giá trị $f(x_2)$} và lưu giá trị này vào biến nhớ D bằng cách:

```
Ans→D
        -4.368869691
```

Để tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị tức $d = \sqrt{(B-A)^2 + (D-C)^2}$ ta ấn:

√■ (ALPHA °,,, − ALPHA (−)) x^2 + (ALPHA sin − ALPHA hyp) x^2 =

Ta được kết quả:

```
√((B-A)²+(D-C)²
        3.261783534
```

Vậy $d \approx 3,261783534$.

Lời giải và đáp số

a) Ta có $A(2;-7) \in (C)$ nên: $4a + 2b + c = -15$

$B(1;-5) \in (C)$ nên: $a + b + c = -6$

$C(-1;-13) \in (C)$ nên: $a - b + c = -12$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4a + 2b + c = -15 \\ a + b + c = -6 \\ a - b + c = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \\ c = -5 \end{cases}$

b) Với các giá trị a, b, c vừa tìm được thì $y = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$.

Ta có $y' = 3x^2 - 8x + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4+\sqrt{7}}{3} \to A \\ x_2 = \dfrac{4-\sqrt{7}}{3} \to B \end{array}\right.$

Sử dụng chức năng [CALC] để tính các giá trị $f(x_1)$, $f(x_2)$.

$f(x_1) = -7,112611781 \to C,$
$f(x_2) = -4,36886991 \to D.$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị tức $d = \sqrt{(B-A)^2 + (D-C)^2} \approx 3,2618.$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + x + 2}$ có đồ thị (C)

a) Tìm a,b,c biết hàm số đi qua $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{30}{11}\right)$; $B\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{97}{23}\right)$;$C\left(-5;\dfrac{101}{22}\right)$

b) Tìm khoảng cách giữa điểm cực đại, cực tiểu hàm số.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Đồng tháp 2010).

Hướng dẫn thực hành

a) Thay A,B,C vào đồ thị (C) có có hệ sau:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b + c = \dfrac{15}{2} \\ \dfrac{16}{25}a - \dfrac{4}{5}b + c = \dfrac{194}{25} \\ 25a - 5b + c = 101 \end{cases}$$

Vào chức năng giải hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn: [MODE] [5] [2]

Nhập các hệ số:

[1] [▭/▭] [4] [=] [1] [▭/▭] [2] [=] [1] [=] [1] [5] [▭/▭] [2] [=] [1] [6] [▭/▭] [2] [5] [=] [−] [4] [▭/▭] [5] [=] [1] [=] [1] [9] [4] [▭/▭] [2] [5] [=] [2] [5] [=] [−] [5] [=] [1] [=] [1] [0] [1] [=] [=]

Ta được $\begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = 6 \end{cases}$

b) Với $a = 4,\ b = 1,\ c = 6$ ta có hàm số

$$y = \frac{4x^2 + x + 6}{x^2 + x + 2}$$

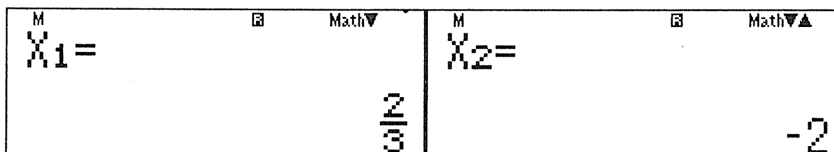
$$y' = \frac{3x^2 + 4x - 4}{x^2 + x + 2},\ y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0$$

Vào chương trình giải phương trình bậc hai: [MODE] [5] [3]

Nhập các hệ số:

[3] [=] [4] [=] [−] [4] [=] [=]

Ta được các nghiệm $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -2$ và lưu $x_1 \to A, x_2 \to B$

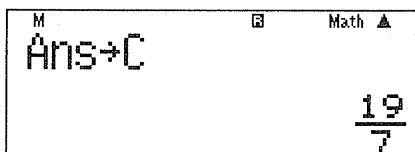


Sử dụng chức năng CALC để tính các giá trị $f(x_1), f(x_2)$

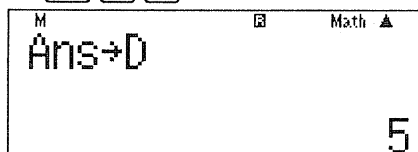
Nhập vào màn hình hàm số: $y = \frac{4x^2 + x + 6}{x^2 + x + 2}$ bằng cách

[▭/▭] [4] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [ALPHA] [)] [+] [6] [▼] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [ALPHA] [)] [+] [2]

Ấn [CALC] [ALPHA] [(–)] [=] {tính giá trị $f(A)$} và lưu vào biến nhớ C.



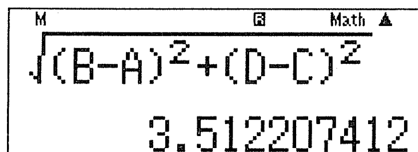
Ấn [▲] quay về hàm số ban đầu, ấn [CALC] [ALPHA] [°'''] [=] {tính giá trị $f(B)$} và lưu vào biến nhớ D bằng cách [SHIFT] [RCL] [sin]



Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $d = \sqrt{(B-A)^2 + (D-C)^2}$ bằng cách

[√▭] [(] [ALPHA] [°'''] [–] [ALPHA] [(–)] [)] [x^2] [+] [(] [ALPHA] [sin] [–] [ALPHA] [hyp] [)] [x^2] [=] [S⇔D]

Ta được kết quả



Vậy $d \approx 3,5122$

Lời giải và đáp số

a) Thay A, B, C vào đồ thị (C) có có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = \frac{15}{2} \\ \frac{16}{25}a - \frac{4}{5}b + c = \frac{194}{25} \\ 25a - 5b + c = 101 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \\ c = 6 \end{cases}.$$

b) Với $a=4, b=1, c=6$ ta có hàm số $y=\dfrac{4x^2+x+6}{x^2+x+2}$

$$y'=\frac{3x^2+4x-4}{x^2+x+2},\ y'=0 \Leftrightarrow 3x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{2}{3}\to A \\ x_2=-2\to B \end{array}\right.$$

Sử dụng chức năng CALC tính các giá trị $f(x_1)=\dfrac{19}{7}\to C;\ f(x_2)=5\to D$

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $d=\sqrt{(B-A)^2+(D-C)^2}\approx 3,5122.$

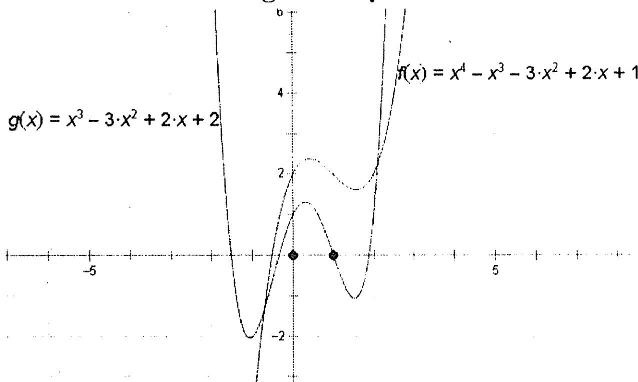
Ví dụ 4. Cho hai đồ thị:

$(C_3): y=f(x)=x^3-3x^2+2x+2$ và $(C_4): y=g(x)=x^4-x^3-3x^2+2x+1$.

Tìm khoảng cách ngắn nhất từ các điểm cực trị của (C_3) đến các điểm cực trị của (C_4).

(Trích Đề thi HSG MTCT, Huế 2012).

Hướng dẫn thực hành



Ta có: $y=g(x)=x^4-x^3-3x^2+2x+1 \Rightarrow g'(x)=4x^3-3x^2-6x+2$

Vào chương trình giải phương trình bậc ba: MODE 5 4

Nhập các hệ số:

MODE 5 4 4 = − 3 = − 6 = 2 = =

Ta được nghiệm thứ nhất

$x_1=-1,075972409$

và lưu nghiệm này vào ô nhớ A bằng cách

SHIFT RCL (−)

Nghiệm thứ hai của phương trình là

$x_2=1,520314681$

X1=
-1.075972409

X2=
1.520314681

X3=
0.305657277

và lưu nghiệm này vào ô nhớ B bằng cách: SHIFT RCL °'''

Nghiệm thứ ba của phương trình là $x_3 = 0,3056577277$ và lưu nghiệm này vào ô nhớ B bằng cách SHIFT RCL hyp

Dùng chức năng CALC ta tính được các điểm cực trị của đồ thị (C_4) của hàm số như sau:

Nhập vào màn hình hàm số: $x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ bằng cách:

ALPHA) $x^■$ 4 ▶ − ALPHA) $x^■$ 3 ▶ − 3 ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) + 1

Ấn CALC ALPHA (−) = {tính giá trị $g(x_1)$ }

M Math ▲
X4−X3−3X2+2X+1
-2.039115763

Ấn CALC ALPHA °''' = {tính giá trị $g(x_2)$ }

M Math ▲
X4−X3−3X2+2X+1
-1.065060464

CALC ALPHA hyp = {tính giá trị $g(x_3)$ }

M Math ▲
X4−X3−3X2+2X+1
1.311207478

$A(-1,075972409;-2,039115763)$

$B(1,520314681;-1,065060464)$

$C(0,3056577727;1,311207478)$

Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

Vào chương trình giải phương trình bậc hai: MODE 5 3

Nhập các hệ số: 3 = − 6 = 2 = =

Ta được nghiệm x_1 và lưu nghiệm này vào ô nhớ E bằng cách: SHIFT RCL cos

M Math▼
X1=
$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

Nghiệm x_2 và lưu nghiệm này vào ô nhớ F bằng cách: SHIFT RCL tan

M Math▼▲
Xz=
$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

Dùng chức năng CALC ta tính được các điểm cực trị của đồ thị (C_4) của hàm số như sau:

Nhập vào màn hình hàm số: x^3-3x^2+2x+2 bằng cách:

ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ − 3 ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) + 2

Ấn CALC ALPHA cos = {tính giá trị của $f(x_1)$}

M Math ▲
X³−3X²+2X+2
$\frac{18-2\sqrt{3}}{9}$

Ấn CALC ALPHA tan = {tính giá trị của $f(x_2)$}

M Math ▲
X³−3X²+2X+2
$\frac{18+2\sqrt{3}}{9}$

$D\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3};\frac{18-2\sqrt{3}}{9}\right)$, $E\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3};\frac{18+2\sqrt{3}}{9}\right)$.

Tính khoảng cách từ các điểm cực trị của (C_3) đến các điểm cực trị của (C_4), ta có:

$d_1 = DA \approx 4,515906638$; $d_2 = DB \approx 2,680767093$; $d_3 = DC \approx 1,307498557$

$d_4 = EA \approx 4,670951228$; $d_5 = EB \approx 3,620372465$; $d_5 = EC \approx 1,080047752$;

Vậy $d_{min} \approx 1,0800$.

Lời giải và đáp số

Xét Ta có: $y = g(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

$$g'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1,075972409 \to A \\ x_2 = 1,520314681 \to B \\ x_3 = 0,3056577727 \to C \end{array}\right.$$

Sử dụng chức năng CALC ta tìm được giác giá trị $g(x_1);g(x_2);g(x_3)$

Các cực trị của hàm $g(x)$ là:

$A\left(-1,075972409;-2,039115763\right)$; $B\left(1,520314681;-1,065060464\right)$

$C\left(0,3056577727;1,311207478\right)$

Xét $y=f(x)=x^3-3x^2+2x+2$

$$f'(x)=3x^2-6x+2, f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\rightarrow E \\ x_2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\rightarrow F \end{array}\right.$$

Sử dụng chức năng CALC ta tìm được các giá trị $f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)$

Các cực trị của hàm $f\left(x\right)$ là: $D\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3};\dfrac{18-2\sqrt{3}}{9}\right)$, $E\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3};\dfrac{18+2\sqrt{3}}{9}\right)$.

Tính khoảng cách từ các điểm cực trị của (C_3) đến các điểm cực trị của (C_4), ta có:

$d_1=DA\approx 4,515906638$; $d_2=DB\approx 2,680767093$; $d_3=DC\approx 1,307498557$

$d_4=EA\approx 4,670951228$; $d_5=EB\approx 3,620372465$; $d_5=EC\approx 1,080047752$;

Vậy $d_{min}\approx 1,0800$.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-3x-\dfrac{1}{x}$ có đồ thị (C).

a) Tìm tọa độ gần đúng của 3 điểm cực trị A, B, C của (*C*).

b) Tính giá trị gần đúng diện tích tam giác ABC.

c) Tính gần đúng các giá trị tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Cần Thơ 2012).

Hướng dẫn thực hành

a) Ta có $y'=\dfrac{x^3-3x^2+1}{x^2}, y'=0\Leftrightarrow x^3-3x^2+1=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A\approx 2,87939 \\ x_B\approx 0,65270 \\ x_C\approx -0,53209 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_A\approx -4,84002 \\ y_B\approx -3,27719 \\ y_C\approx 3,61721 \end{array}\right.$$

b) Lưu các giá trị tọa độ vào phím nhớ.

Sử dụng công thức $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left(x_B-x_A\right)\left(y_C-y_A\right)-\left(x_C-x_A\right)\left(y_B-y_A\right)\right|$

$S\approx 6,75000$

c) Xét phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

c) Lần lượt thay tọa độ các điểm *A, B, C* vào phương trình trên. Giải hệ ta được:

$$\begin{cases} a \approx 5,37500 \\ b \approx 1,08333 \\ c \approx -11,25000 \end{cases} \Rightarrow \text{Tâm } I(a;b),\ R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \approx 6.42761$$

BT 2. Cho hai đồ thị $(C_3): y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1;\ (C_4): y = x^4 - 2x^2 + 4$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ cực trị (C_3) đến cực trị (C_4).

(Trích Đề thi HSG MTCT, Bộ Giáo dục 2011).

Hướng dẫn thực hành

Ứng dụng đạo hàm, đồ thị (C_3) có hai cực trị $Đ_1(1;3)$ và $T_2(3;-1)$

Đồ thị (C_4) có 3 điểm cực trị $Đ_3(0;4)$ và $T_4(-1;3), T_5(1;3)$.

Nhận xét $Đ_1 \equiv T_5$ nên $d_{min} = 0$.

BT 3. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$. Tính chu vi tam giác tạo thành từ ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Tuyên Quang 2012).

Hướng dẫn thực hành

$y' = 4x^3 - 8x$, $y' = 0$ khi $x = 0$ và $x = \pm\sqrt{2}$.

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0;1)$, $B(-\sqrt{2};-3)$, $C(+\sqrt{2};-3)$

$C_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 2\sqrt{18} + 2\sqrt{2} \approx 11,3137.$

BT 4. Tính gần đúng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^2 + 4x + 5}.$$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Vĩnh Phúc 2011).

Hướng dẫn thực hành

$$f'(x) = \frac{15x^2 + 18x - 39}{(x^2 + 4x + 5)^2}$$

Giải PT $f'(x) = 0$ tìm ra $x_{C§}, x_{CT}$.

$f_{C§} \approx 25,4035;\quad f_{CT} \approx -0,4035$

BT 5. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua các điểm $A(-4;3)$, $B(7,5)$, $C(-5,6)$, $D(-3,-8)$. Tìm các giá trị a,b,c,d và tính gần đúng khoảng cách giữa các điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Phú Yên 2009).

Hướng dẫn thực hành

Thay tọa độ các điểm vào phương trình hàm, giải hệ phương trình ta tìm được các hệ số a, b, c, d.

Tính y', cho $y'=0$ để tìm tọa độ cực đại A, cực tiểu B.

Tính khoảng cách AB.

Đáp số: $a=\frac{563}{1320}$; $b=\frac{123}{110}$; $c=-\frac{25019}{1320}$; $d=-\frac{1395}{22}$; $AB\approx 105,1791$.

BT 6. Biết rằng hàm số $y = x^4 - 2(m - 2008)x^2 + (2008 - m)^4 + 2m - 4016$ có cực đại, cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác đều. Tính gần đúng giá trị của m.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Vĩnh Phúc 2010).

Hướng dẫn thực hành

Đặt $n = m - 2008$ ta có các điểm cực trị là:

$A(0; n^4+ 2n)$;

$B(-\sqrt{n}\,; n^4 - n^2 + 2n)$;

$C(\sqrt{n}\,; n^4 - n^2 + 2n)$;

Từ giả thiết tính được $n = \sqrt[3]{3}$

$m \approx 2009,4422$

BT 7. Cho hàm số $y=\frac{3x^2+4x+6}{2x-1}$. Gọi A, B lần lượt là điểm cực đại, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

a) Tìm giá trị đúng của toạ độ A và B.

b) Tính gần đúng khoảng cách giữa hai điểm A và B.

Hướng dẫn thực hành

Khảo sát hàm số để tìm A, B

$$A\left(\frac{3-\sqrt{105}}{6};\frac{7-\sqrt{105}}{2}\right)$$

$$B\left(\frac{3+\sqrt{105}}{6};\frac{7+\sqrt{105}}{2}\right)$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\approx 10,80123.$$

Dạng 4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Phương pháp

1. Kiến thức MTCT

- Biết cách giải phương trình bậc hai, bậc ba
- Sử dụng chức năng CALC để tính giá trị của hàm số
- Biết cách lưu và gọi các giá trị
- Biết cách sử dụng bảng **TABLE** để tìm GTLN, GTNN

2. Kiến thức toán

Để tìm GTLN và GTNN của hàm số, một trong những công cụ mạnh nhất đó là đạo hàm

Cách 1: Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng.

- Tính f'(x).
- Xét dấu f'(x) và lập bảng biến thiên.
- Dựa vào bảng biến thiên để kết luận.

Cách 2: Thường dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số **liên tục trên một đoạn** [a; b].

- Tính f' (x).
- Giải phương trình f' (x) = 0 tìm được các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên [a; b] (nếu có).
- Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.
- So sánh các giá trị vừa tính và kết luận.

$$m = \min_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$$

$$M = \max_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$$

Ngoài công cụ đạo hàm, ta còn có thể sử dụng các công cụ hay phương pháp khác như: Bất đẳng thức, dựa vào miền giá trị,.... sẽ được nhắc đến trong phần phân tích và bình luận.

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Tìm gần đúng GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \frac{1}{\sin x + 2} - \frac{1}{\cos x - 2}.$$

(Trích Đề thi HSG MTCT An Giang 2011)

Hướng dẫn thực hành

Ta có $y = \frac{1}{\sin x + 2} - \frac{1}{\cos x - 2} = \frac{\cos x - \sin x - 4}{\sin x \cos x + 2(\cos x - \sin x) - 4}$

Đặt $t = \cos x - \sin x,\ t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$

Hàm số đã cho trở thành: $y = f(t) = \dfrac{2t-8}{-t^2+4t-7}$

Ta có $f'(t) = \dfrac{2t^2-16t+18}{-t^2+4t-7}$, vào chương trình giải phương trình bậc hai để giải $f'(t) = 0$ như sau: MODE 5 3 {chọn chương trình giải phương trình bậc hai}, sau đó nhập các hệ số: 2 = − 1 6 = 1 8 =

Ta được

X1=	X2=
$4+\sqrt{7}$	$4-\sqrt{7}$

Như vậy: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4-\sqrt{7} \to A \\ t = 4+\sqrt{7}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$

Sử dụng chức năng CALC để tính giá trị $f(A)$, $f(\sqrt{2})$; $f(-\sqrt{2})$

Nhập vào màn hình hàm số: $\dfrac{2X-8}{-X^2+4X-7}$ bằng cách

▭ 2 ALPHA) − 8 ▼ − ALPHA) x^2 + 4 ALPHA) − 7

Tiếp tục ấn CALC , máy yêu cầu nhập giá trị cần tính của hàm số

Ta ấn: ALPHA (−) = S⇔D {tính giá trị của $f(A)$}

$\dfrac{2X-8}{-X^2+4X-7}$ 1.54858377

Ấn CALC √▭ 2 = S⇔D {tính giá trị của $f(\sqrt{2})$}

$\dfrac{2X-8}{-X^2+4X-7}$ 1.546918161

Ấn CALC − √▭ 2 = S⇔D {tính giá trị của $f(-\sqrt{2})$}

$\dfrac{2X-8}{-X^2+4X-7}$ 0.738796125

Lời giải và đáp số

Ta có $y=\dfrac{1}{\sin x+2}-\dfrac{1}{\cos x-2}=\dfrac{\cos x-\sin x-4}{\sin x\cos x+2(\cos x-\sin x)-4}$

Đặt $t=\cos x-\sin x,\ t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$

Hàm số đã cho trở thành: $y=f(t)=\dfrac{2t-8}{-t^2+4t-7}$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t^2-16t+18}{-t^2+4t-7}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4-\sqrt{7}\to A\\ t=4+\sqrt{7}\text{ (loại)}\end{array}\right.$

Sử dụng chức năng CALC để tính giá trị $f(A)=1{,}54858377$;

$f(\sqrt{2})=1{,}54858377$; $f(-\sqrt{2})=0{,}738796125$

Vậy $\text{Max}y\approx 1{,}54858377$; $\text{Min}y\approx 0{,}738796125$.

Ví dụ 2. Tìm gần đúng GTLN và GTNN của hàm số

$$y=\frac{x^2+x-2}{5x^2+x+1}$$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Cần Thơ 2009).

Hướng dẫn thực hành

Nhận thấy $5x^2+x+1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Nếu sử dụng máy tính thì kết quả báo hai nghiệm phức như sau:

$X_1=-\dfrac{1}{10}+\dfrac{\sqrt{19}}{10}i$	$X_2=-\dfrac{1}{10}-\dfrac{\sqrt{19}}{10}i$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm và giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\dfrac{1}{5}=0{,}2$; $y'=\dfrac{-4x^2+22x+3}{(5x^2+x+1)^2}$

Dùng máy tính giải phương trình bậc hai $y'=0$ như sau:

MODE 5 3 { chế độ giải phương trình bậc hai}

Nhập các hệ số: − 4 = 2 2 = 3 =

Ta được hai nghiệm là

$X_1=\dfrac{11+\sqrt{133}}{4}$	$X_2=\dfrac{11-\sqrt{133}}{4}$

Do đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{11+\sqrt{133}}{4} \approx 5,63314 \\ x_2 = \dfrac{11-\sqrt{133}}{4} \approx -0,13314 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên từ đó và kết luận.

Lời giải và đáp số

Nhận thấy $5x^2+x+1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm và giới hạn:

Ta có: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{1}{5} = 0,2$; $y' = \dfrac{-4x^2+22x+3}{(5x^2+x+1)^2}$

Do đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{11+\sqrt{133}}{4} \approx 5,63314 \\ x_2 = \dfrac{11-\sqrt{133}}{4} \approx -0,13314 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	0,2	↘	-0,21359	↗	0,21359	↘	0,2

Đáp số: Maxy $\approx 0,21395$; Miny $\approx -2,21395$

Ví dụ 43. Tìm gần đúng GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \sqrt{-x^2+4x-3} + \sqrt{5-2x}$$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Huế 2009).

Hướng dẫn thực hành

Hàm số xác đinh khi $\begin{cases} -x^2+4x-3 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \dfrac{5}{2}$.

Ta có:

$$y' = \frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}} - \frac{2}{2\sqrt{5-2x}} = \frac{(-x+2)\sqrt{5-2x} - \sqrt{-x^2+4x-3}}{\sqrt{-x^2+4x-3}.\sqrt{5-2x}}$$

$y'=0 \Leftrightarrow (-x+2)\sqrt{5-2x} = \sqrt{-x^2+4x-3}$

$\Leftrightarrow (-x+2)^2(5-2x) = -x^2+4x-3 \left(x \in \left[1; \dfrac{5}{2}\right]\right)$

$\Leftrightarrow 2x^3-14x^2+32x-23=0,\ x \in \left[1; \dfrac{5}{2}\right]$

Vào chức năng giải phương trình bậc 3: MODE 5 4

Nhập các hệ số: 2 = − 1 4 = 3 2 = − 2 3 =

ta chỉ thu được một nghiệm thực $x \approx 1,4348022 \in \left[1;\frac{5}{2}\right]$(lưu nghiệm này vào biến nhớ A bằng cách ấn SHIFT RCL (−)) và hai nghiệm ảo

Dùng chức năng CALC để tính và so sánh các giá trị $f(1)$; $f\left(\frac{5}{2}\right)$; $f(A)$

Nhập vào máy hàm số: $\sqrt{-x^2+4x-3}+\sqrt{5-2x}$ bằng cách:

√■ − ALPHA) x² + 4 ALPHA) − 3 ▶ + √■ 5 − 2 ALPHA)

Ấn tiếp phím CALC

Nhập 1 = {tính giá trị của $f(1)$}, ta được $f(1)=\sqrt{3}\approx 1,732050808$

Ấn tiếp CALC 5 ■/□ 2 = S⇔D {tính giá trị của $f\left(\frac{5}{2}\right)$}, ta được

$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,8660254038$

Ấn tiếp CALC ALPHA (−) = S⇔D {tính giá trị của $f(A)$}, ta được $f(A)\approx 2,284542897$

Vậy $\text{Max}y \approx 2,2845$; $\text{Min}y \approx 0,866$.

Lời giải và đáp số

Hàm số xác định khi $\begin{cases}-x^2+4x-3\ge 0\\5-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le\frac{5}{2}$.

Ta có:

$$y'=\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}-\frac{2}{2\sqrt{5-2x}}=\frac{(-x+2)\sqrt{5-2x}-\sqrt{-x^2+4x-3}}{\sqrt{-x^2+4x-3}.\sqrt{5-2x}}$$

$$y'=0\Leftrightarrow(-x+2)\sqrt{5-2x}=\sqrt{-x^2+4x-3}$$

$$\Leftrightarrow(-x+2)^2(5-2x)=-x^2+4x-3\left(x\in\left[1;\frac{5}{2}\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-14x^2+32x-23=0\Leftrightarrow x\approx 1,4348022\to A$$

Ta có

$f(1)=\sqrt{3}\approx 1,732050808$; $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,8660254038$;$f(A)\approx 2,284542897$

Vậy $\text{Max}y \approx 2,2845$; $\text{Min}y \approx 0,866$.

Ví dụ 4. Tìm gần đúng GTLN và GTNN của hàm số

$$y=\left|x^4-\frac{\sqrt{3}}{2}x^3-\sqrt[3]{17}x^2+x-\frac{1}{\sqrt[2011]{2012}}\right| \text{ trên đoạn } \left[-\sqrt{3};\sqrt{2}\right]$$

(Đề thi HSG MTCT Quảng trị 2012).

Lời giải và đáp số

Đặt $D=\left[-\sqrt{3};\sqrt{2}\right]$. Xét hàm số $f(x)=x^4-\frac{\sqrt{3}}{2}x^3-\sqrt[3]{17}x^2+x-\frac{1}{\sqrt[2011]{2012}}$, hàm này xác định và liên tục trên D.

Ta có $f'(x)=4x^3-\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2-2\sqrt[3]{17}x+1$.

Sử dụng chương trình giải phương trình bậc 3 để giải phương trình $f'(x)=0$ như sau:

[MODE] [5] [4] {chọn chương trình giải phương trình bậc ba}

Nhập các hệ số:

[4] [=] [−] [3] [√■] [3] [)] [÷] [2] [=] [−] [2] [SHIFT] [√■] [1] [7] [=] [1] [=] [=]

Ta được các nghiệm x_2, x_3 và lưu các nghiệm này vào biến nhớ A và B ($x_2 \to A, x_3 \to B$) {loại nghiệm thứ nhất $x \approx 1,427471982 \notin \left[-\sqrt{3};\sqrt{2}\right]$}

X2=	X3=
0.1823706068	-0.960323535 8

Thoát màn hình, chuyển về chế độ tính toán thông thường ta ấn: [MODE] [1]

Sử dụng chức năng [CALC] để tính các giá trị hàm số tại điểm

Nhập vào màn hình $x^4-\frac{\sqrt{3}}{2}x^3-\sqrt[3]{17}x^2+x-\frac{1}{\sqrt[2011]{2012}}$ bằng cách:

[ALPHA] [)] [x■] [4] [▶] [−] [▭/▭] [√■] [3] [▼] [2] [▶] [ALPHA] [)] [x■] [3] [▶] [−] [SHIFT] [√■] [1] [7] [▶] [ALPHA] [)] [x²] [+] [ALPHA] [)] [−] [▭/▭] [1] [▼] [SHIFT] [x■] [2] [0] [1] [1] [▶] [2] [0] [1] [2]

Tiếp tục ấn [CALC] và nhập các giá trị để tính hàm số tại điểm đó:

Ấn [−] [√■] [3] [=] {tính giá trị $f\left(-\sqrt{3}\right)$} ta được

$X^4-\frac{\sqrt{3}}{2}X^3-\sqrt[3]{17}X^2$ ▷
3.057879913

Ấn [CALC] [√■] [2] [=] {tính giá trị $f\left(\sqrt{2}\right)$} ta được

```
X⁴ − √3/2 X³ − ∛17 X² ▷
                -3.174063869
```

Ấn [CALC] [ALPHA] [(−)] [=] {tính giá trị của $f\left(A\right)$}

```
X⁴ − √3/2 X³ − ∛17 X² ▷
                -0.9035189416
```

Ấn [CALC] [ALPHA] [°'''] [=] {tính giá trị của $f\left(B\right)$} ta được

```
X⁴ − √3/2 X³ − ∛17 X² ▷
                -2.710367781
```

Vậy ta có:

$f\left(-\sqrt{3}\right) \approx 3,0579;$ $\quad f\left(\sqrt{2}\right) \approx -3,1741;$

$f\left(-0,9603\right) \approx -2,7106;$ $\quad f\left(0,1824\right) \approx -0,9035$

Suy ra: $-3,1741 \le f\left(x\right) \le 3,0579,\ \forall x \in D$.

Do đó: $0 \le \left|f\left(x\right)\right| \le 3,1741, \forall x \in D$

Đáp số: $\text{Max}y \approx 3,1741;$ $\quad \text{Min}y \approx 0$.

Lời giải và đáp số

Đặt $D = \left[-\sqrt{3};\sqrt{2}\right]$. Xét hàm số $f\left(x\right) = x^4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^3 - \sqrt[3]{17}x^2 + x - \frac{1}{\sqrt[2011]{2012}}$, hàm này xác định và liên tục trên D.

Ta có

$$f'\left(x\right) = 4x^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 - 2\sqrt[3]{17}x + 1,\ f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 1,4275\left(\text{loại}\right) \\ x \approx 0,1824 \\ x \approx -0,9603 \end{array}\right.$$

Vậy ta có:

$f\left(-\sqrt{3}\right) \approx 3,0579;$ $\quad f\left(\sqrt{2}\right) \approx -3,1741;$

$f\left(-0,9603\right) \approx -2,7106;$ $\quad f\left(0,1824\right) \approx -0,9035$

Suy ra: $-3,1741 \le f\left(x\right) \le 3,0579,\ \forall x \in D$.

Do đó: $0 \le \left|f(x)\right| \le 3,1741, \forall x \in D$

Đáp số: $Maxy \approx 3,1741$; $Miny \approx 0$.

Ví dụ 5. Tìm gần đúng với 4 chữ số lẻ thập phân giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \dfrac{e^{\sin x} + x^2\cos x + 1}{x^2 + 1}$ trên đoạn $[0;1]$.

Hướng dẫn thực hành

Dùng chức năng **TABLE,** với bước nhảy 0,1. Ta tính được các giá trị (trong Radian)

x	0	0,1	0,2	...	0,4	0,5	0,6	...	1
$f(x)$	2	2,0939	2,172		2,2616	2,2676	2,247		1,93

Ấn AC và =, chọn lại giá trị khởi đầu là 0,4 và cuối là 0,6, bước nhảy là 0,01.

Suy ra được: $\underset{[0;1]}{Max}\, y \approx 2,2628$; $\underset{[0;1]}{Min}\, y \approx 1,93$.

Lưu ý: Học sinh có thể giải theo cách thông thường, nhưng rất phức tạp:

$$f'(x) = \frac{e^{\sin x}\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x}{x^2+1} - \frac{2\left(e^{\sin x} + x^2\cos x + 1\right)x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Dùng chức năng **SOLVE** với giá trị ban đầu 0,4 để giải phương trình $f'(x) = 0$.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 5$. Tìm gần đúng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(x^5 + 5\right)\left(y^5 + 5\right)$.

(Đề thi HSG MTCT Vĩnh phúc 2010).

Lời giải và đáp số

Đặt $t = xy$ thì $0 < t \le \dfrac{25}{4}$.

Ta có $P = x^5y^5 + 5(x^5 + y^5) + 25$

Mặt khác: $x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) = 25t^2 - 625t + 3125$

Vậy $P = t^5 + 125t^2 - 3125t + 15650$

Xét hàm $f(t) = t^5 + 125t^2 - 3125t + 15650,\ t \in \left[0; \dfrac{25}{4}\right]$

$f'(t)=5t^4+250t-3125$, dễ thấy $f'(t)=0$ chỉ có một nghiệm duy nhất trên $\left[0;\frac{25}{4}\right]$. Dùng chức năng SHIFT CALC $(SOLVE)$ giải phương trình: f(t) tìm ra một nghiệm $t\approx 4,4755$.

Kết quả: $P_{min}\approx 5963,4176$.

Lời bình: Cách giải trên ta đã sử dụng biến đổi khéo léo đưa về tích và tổng của x,y. Tuy nhiên ta có thể dùng phương pháp dồn về một biến bằng cách: từ $x+y=5\Rightarrow y=5-x$ thay vào biểu thức P và dùng khai triển nhị thức Niu-tơn ta đưa về hàm một biến x, với $x\in(0,5)$.

BT 2. Tìm gần đúng GTLN và GTNN của hàm số:

$$y=f(x)=2-3x-\sqrt{5x-x^2+4}.$$

(Đề thi HSG MTCT Bộ Giáo Dục 2012).

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $5x-x^2+4\ge 0\Leftrightarrow -0,70152\approx\frac{5-\sqrt{41}}{2}\le x\le\frac{5+\sqrt{41}}{2}\approx 5,7016$

Ta có:

$$f'(x)=-3-\frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2+4}}=\frac{-6\sqrt{5x-x^2+4}-(5-2x)}{2\sqrt{5x-x^2+4}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6\sqrt{5x-x^2+4}=2x-5\Leftrightarrow 40x^2-200x-119=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{100-\sqrt{14760}}{40}\approx -0,5373\\ x=\frac{100-\sqrt{14760}}{40}\approx 5,5373\end{array}\right.$$

Vậy:

$$\max y=\max\left\{f\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right);f\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right);f\left(\frac{100-\sqrt{5240}}{40}\right);f\left(\frac{100+\sqrt{5240}}{40}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \max y\approx 4,10469$$

$$\min y=\min\left\{f\left(\frac{5-\sqrt{41}}{2}\right);f\left(\frac{5+\sqrt{41}}{2}\right);f\left(\frac{100-\sqrt{5240}}{40}\right);f\left(\frac{100+\sqrt{5240}}{40}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \max y\approx -15,6242$$

BT 3. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a^2+ab=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\frac{a}{a+2b}-\frac{1}{b+2a}$.

Lời giải và đáp số

Từ giả thiết ta có $a \in (0;1)$ và $b = \frac{1}{a} - a$. Thay vào A ta được:

$$A = \frac{a}{\frac{2}{a} - a} - \frac{1}{\frac{1}{a} + a} = \frac{a^2}{2 - a^2} - \frac{a}{1 + a^2} = f(a)$$

$$f'(a) = \frac{4a}{(2 - a^2)^2} - \frac{1 - a^2}{(1 + a^2)^2}.$$

Giải phương trình $f'(a) = 0$ ta được $a = 0,4483$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $-0,2616$.

Đáp số: $\text{MinA} \approx -0,2616$.

BT 4. Tìm GTLN và GTNN của hàm số:

$$y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{5 - 2x}.$$

(Đề thi HSG MTCT Bộ Giáo dục 2009).

Lời giải và đáp số

Tập xác định: $D = \left[1;2,5\right]$.

Sử dụng phương pháp đạo hàm ta tìm được

$$\underset{D}{\text{Max}}\, y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,1231; \qquad \underset{D}{\text{Min}}\, y = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,2247$$

BT 5. Tìm gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x + \sqrt{3 + 2x - x^2}.$$

(Đề thi HSG MTCT Đồng Tháp 2009).

Hướng dẫn thực hành

Tập xác định: $D = \left[-1;3\right]$.

Ta có:

$$f'\left(x\right) = 1 - \frac{x + 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}},$$

$$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3 + 2x - x^2} = x + 1 \Leftrightarrow 3 + 2x - x^2 = x^2 + 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Tính và so sánh các giá trị $f\left(-1\right); f\left(1\right); f\left(3\right)$ ta được: $\max\limits_{D} y = 3;\ \min\limits_{D} y = -1$.

BT 6. Tìm gần đúng GTLN và GTNN của hàm số

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{5x - x^2 - 4}.$$

(Đề thi HSG MTCT Phú Yên 2009).

Hướng dẫn thực hành

Tập xác định: $D=[1;4]$.

Tính $f'(x)$. Tìm các điểm x_i sao cho $f'(x_i)=0$

Tính và so sánh cách giá trị $f(1), f(4), f(x_i)$.

Ta tìm được $\max_D f(x)=6,0966;\quad \min_D f(x)=2,4495$.

BT 7. Tính gần đúng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y=-\sin 2x+(\sin x+\cos x)^3-(\sin x+\cos x) \text{ trên đoạn } \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

(Đề thi HSG MTCT Quãng Ngãi 2009).

Hướng dẫn thực hành

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Để ý: $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 0\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$

Do đó, hàm số đã cho trở thành: $y=-t^2+t^3-t,\ t\in\left[1;\sqrt{2}\right]$

Khảo sát hàm này ta sẽ tìm được GTLN và GTNN.

BT 8. Tính gần đúng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{7-2x}.$$

(Đề thi HSG MTCT Vĩnh Phúc 2009).

Hướng dẫn thực hành

TXĐ: $x\in\left[1;\frac{7}{2}\right]$. Giải phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm $x=\frac{11}{6}$.

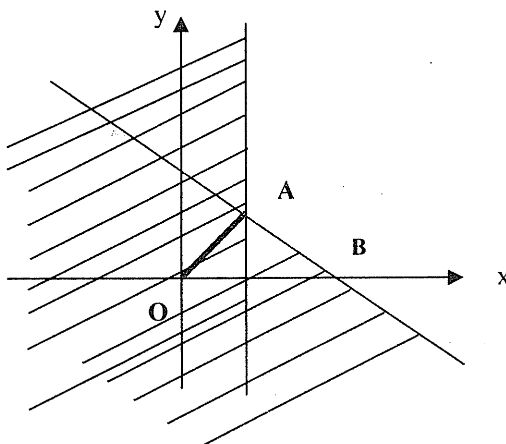
$\min f(x)=f\left(\frac{7}{2}\right)\approx 1,5811;\qquad \max f(x)=f\left(\frac{11}{6}\right)\approx 2,7386$

BT 9. Cho hai số thực *x*, *y* thoả mãn hệ điều kiện: $\begin{cases}x\ge\sqrt{12}+\sqrt{2009}\\ x+y\ge\sqrt{30}+\sqrt{12}+\sqrt{2009}\end{cases}$

Tính gần đúng giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2$.

Hướng dẫn thực hành

Trong mặt phẳng toạ độ xOy biểu diễn các điểm $M(x;y)$ thoả mãn hệ điều kiện đã cho.



$A\left(\sqrt{12}+\sqrt{2009};\sqrt{30}\right)$; $B\left(\sqrt{12}+\sqrt{2009}+\sqrt{30};0\right)$

Dễ thấy góc OAB tù. Vậy $P = x^2 + y^2 = OM^2$ nhỏ nhất khi $M \equiv A$

Do đó $P_{min} = \left(\sqrt{12}+\sqrt{2009}\right)^2 + \left(\sqrt{30}\right)^2 \approx 2361{,}5350$.

BT 10. Tính gần đúng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{\cos^4 x - 2\cos^3 x + \cos^2 x + 1} + \sqrt{\cos^4 x - 2\cos^3 x + 5\cos^2 x - 4\cos x + 11}$$

Lời giải và đáp số

Đặt $t = \cos^2 x - \cos x$, $t \in \left[-\frac{1}{4};2\right]$. Hàm số đã cho trở thành

$$y = f(t) = \sqrt{t^2+1} + \sqrt{t^2+4t+11} \quad ,t \in \left[-\frac{1}{4};2\right]$$

Khảo sát hàm này ta được:

$y_{max} = f(2) \approx 7{,}03190$

$y_{min} = f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 4{,}20292$

BT 11. Tìm gần đúng GTLN và GTNN của hàm số

$$y = \frac{2\sin x + 3\cos x - 1}{\cos x + 2}$$

(Đề thi HSG MTCT Quảng Ninh 2009).

Lời giải và đáp số

Sử dụng miền giá trị của y để tìm GTLN và GTNN của hàm số.

Chú ý: Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \ge c^2$

Đáp số: $\text{Maxy} \approx \dfrac{-5+\sqrt{61}}{3}$; $\text{Miny} \approx \dfrac{-5-\sqrt{61}}{3}$.

BT 12. Tính gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = 3x - 4\sin x$ trên đoạn $[0;2\pi]$.

(Trích đề thi HSGMTCT Toàn quốc năm 2004 - Lớp 12 THBT - đề dự bị)

Lời giải và đáp số

Ta có: $f'(x) = 3 - 4\cos x$

Giải phương trình $f'(x) = 0$

Nhập $3 - 4\cos x$ Ấn SHIFT CALC nhập 1 ấn

Kết quả: $X = 0,7227342478 \to A$

$\Rightarrow (2\pi - A) \to B$ { lưu nghiệm này vào ô nhớ B} cũng là nghiệm thuộc $[0;2\pi]$ của phương trình $f'(x) = 0$

Ghi vào màn hình: $3X - 4\sin X$

Ấn CALC ALPHA (−) (A) = . Kết quả -0.4775485676

Ấn CALC ALPHA °''' = . Kết quả 19,32710449

Ấn CALC 0 =. Kết quả 0

Ấn SHIFT ×10ˣ =. Kết quả 18,84955592

Vậy $\max\limits_{[0;2\pi]} f(x) = 19,32710449$; $\min\limits_{[0;2\pi]} f(x) = -0,477548567$.

BT 13. Tính gần đúng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số

$$f(x) = 3(\sin x + \cos x) - 2\sqrt{3}\cos^2 x + \left(3 + \sqrt{3}\right)$$

(Trích đề thi HSG MTCT Thừa Thiên Huế lớp 12 - 2008-2009)

Lời giải và đáp số

Đặt $t = \sin x + \cos x,\ t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

Ta có

$$\cos^2 2x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)^2 = \left[(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)\right]^2$$
$$= t^2\left(2 - t^2\right) = 2t^2 - t^4$$

Yêu cầu bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$g(t) = 2\sqrt{3}t^4 - 4\sqrt{3}t^2 + 3t + \sqrt{3} + 3,\ t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$g'(t) = 8\sqrt{3}t^3 - 8\sqrt{3}t + 3$

Giải $g'(x)=0$ bằng cách:

Ấn MODE 5 4

Nhập các hệ số: 8 √ 3 = 0 = − 8 √ 3 = 3 = =

Ta được là $t_1=-1,09445053$, $t_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $t_3=0,2284251259$

Nhập vào màn hình: $2\sqrt{3}X^4-4\sqrt{3}X^2+3X+\sqrt{3}+3$

Tính $g\left(-\sqrt{2}\right)$ Ấn CALC nhập − √ 2 ấn =. Kết quả: 0,4894101204

Tính $g\left(\sqrt{2}\right)$ Ấn CALC nhập √ 2 ấn =. Kết quả: 8,974691495

Tính $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Ấn CALC nhập CALC √ 3) ÷ 2 S⇔D ấn = S⇔D.

Kết quả: 4,082531755

Tính $g(-1,09445053)$ Ấn CALC nhập -1.09445053 ấn =. Kết quả: -1.879839877

Tính $g(0,2284251259)$ Ấn CALC nhập 0.228425125 ấn . Kết quả: 5.065257315

Vậy GTNN là -1.879839877; GTLN là 8.974691495.

BT 14. Tìm gần đúng GTLN của hàm số

$$y=f(x)=5\cos x-\cos 5x \text{ trên } \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$$

(Trích Đề thi HSG MTCT, Bạc Liêu 2010).

Lời giải và đáp số

Ta có $f'(x)=5\sin 5x-5\sin x$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 2\cos 3x\sin 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \sin 2x=0\end{array}\right.$

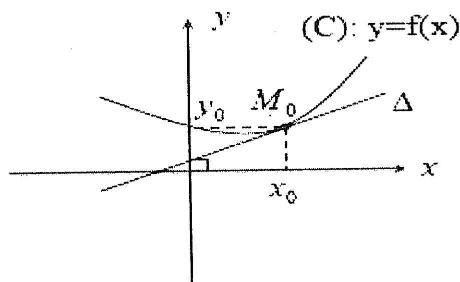
Giải phương trình ta tìm được các nghiệm là $x_1=0, x_2=-\frac{\pi}{6}, x_3=\frac{\pi}{6}$

Sử dụng chức năng CALC để tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ so sánh để xác định max.

Đáp số: $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]} f(x)\approx 5,1962$

Dạng 5. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm



Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ có dạng

$$\Delta: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- Điểm $M_0(x_0;y_0)$ được gọi là tiếp điểm.
- x_0 là hoành độ tiếp điểm và y_0 là tung độ tiếp điểm.
- Điểm $M \in Ox$ thì tọa độ của M là $M(x;0)$; điểm $M \in Oy$ thì tọa độ của M là $M(0;y)$.

Chú ý

- Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$.
  Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$.
- Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc

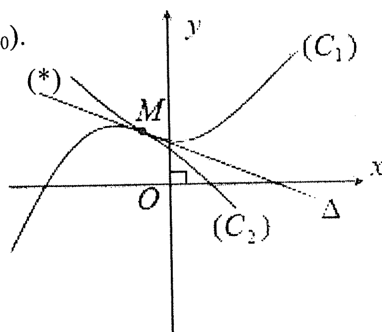
Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): y = f(x), biết Δ có hệ số góc k cho trước.

__Cách 1__:Tìm toạ độ tiếp điểm.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.
- có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k$
- Giải phương trình (*), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$.

Lúc đó phương trình tiếp tuyến là

$\Delta: y - f(x_0) = k(x - x_0)$.



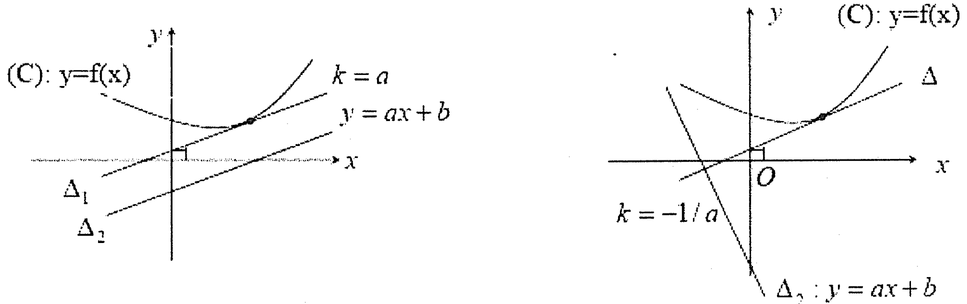
__Cách 2__: *Dùng điều kiện tiếp xúc.*

- Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $y = kx + m$.
- Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} \qquad (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ

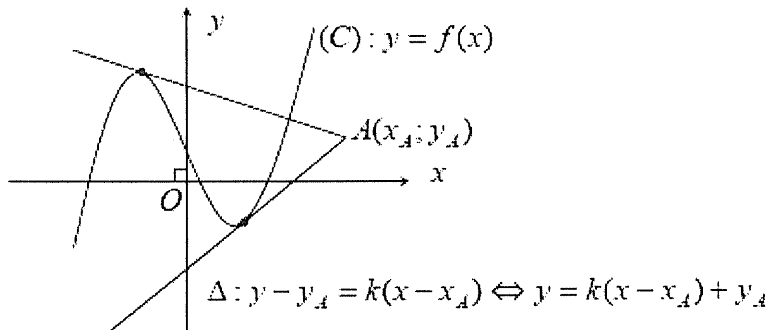
Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:



- tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$
- Δ song song với đường thẳng d: $y = ax + b$ thì $k = a$
- Δ vuông góc với đường thẳng d: $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$
- Δ tạo với đường thẳng d: $y = ax + b$ một góc α thì ta sử dụng công thức góc của hai đường thẳng hoặc $\left|\dfrac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$ (Công thức này SGK không có, tuy nhiên chúng ta nên biết lỡ khi "bí" có thể đem ra dùng).

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước.

Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$.



Cách 1: Tìm toạ độ tiếp điểm.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$.
- Phương trình tiếp tuyến Δ: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$
- Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0)$
- Giải phương trình (2), tìm được x_0. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

- Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A;y_A)$ và có hệ số góc k:

  $y-y_A=k\left(x-x_A\right)$

- Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

  $$\begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases} \qquad (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=1-\dfrac{1}{x+1}$ (H). Tìm tọa độ M thuộc (H) để tiếp tuyến tại (H) cắt đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-2y-1=0$ tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB vuông, và I là tâm của đường tròn.

(Đề thi HSG MTCT Quảng Trị 2013).

Lời giải và đáp số

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

Gọi $M\left(t;\dfrac{t}{t+1}\right)\in(H)$, $t\neq-1$. Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M có dạng:

$$\Delta: y=\frac{1}{(t+1)^2}(x-t)+\frac{t}{t+1}\Leftrightarrow\frac{1}{(t+1)^2}x-y+\frac{t}{t+1}-\frac{t}{(t+1)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow x-(t+1)^2y+t^2=0$$

Tam giác IAB chỉ có thể vuông cân tại I nên ta tính được: $d(I,\Delta)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Mặt khác: $$d(I,\Delta)=\frac{\left|-1-(t+1)^2+t^2\right|}{\sqrt{1+(t+1)^4}}=\frac{|-2t-2|}{\sqrt{1+(t+1)^4}}$$

Do đó: $$\frac{|-2t-2|}{\sqrt{1+(t+1)^4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow 3(t+1)^4-8(t+1)^2+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-1\pm\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}} \\ t=-1\pm\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}} \end{array}\right.$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán

$M_1(-2,4884;1,6719)$; $M_2(0,4884;0,3281)$;

$M_3(-1,6719;2,4884)$; $M_3(-0,3281;-0,4884)$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x)=e^{3x^2+\sqrt{x}}\sin 4x+\log_3(\sin x+2)$

a) Tính giá trị của hàm số khi $x=\dfrac{\pi}{12}$.

b) Đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x=\dfrac{\pi}{12}$.

Tìm a, b.

(Đề thi HSG MTCT Bộ GD 2013).

Lời giải và đáp số

Để máy tính ở chế độ rad

Ghi vào màn hình máy tính: $e^{3X^2+\sqrt{X}}\sin(4X)+\log_3((\sin(X)+2))$

Ấn phím CALC và nhập $x=\dfrac{\pi}{12}$ ta được kết quả trên màn hình là 2,516059996 lưu vào ô nhớ A.

Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\approx 9,007985$ lưu vào ô nhớ B.

Ghi vào màn hình: $A-\dfrac{\pi}{12}B$ ấn phím = và được kết quả trên màn hình là:

0,157775037.

Đáp số: a) 2,5161; b) $a\approx 9,0080$; $b\approx 0,1578$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=f(x)=x^{\sin x+\sqrt{x}+x}, (x>0)$. Tính theo rad góc tạo bởi tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0=\sqrt{3}$, với đường thẳng $x=2012$.

(Đề thi HSG MTCT Tuyên Quang 2011).

Hướng dẫn thực hành

Gọi d là tiếp tuyến và α là góc tạo bởi d với chiều dương của trục Ox. Khi đó $\tan\alpha=f'(x_0)>0$.

Sử dụng máy tính tính đạo hàm $f'(\sqrt{3})=27,52180451$

Math ▲

$\frac{d}{dx}(X^{\sin(X)+\sqrt{X}+X}$ ▷

27.52180451

Ấn SHIFT tan Ans màn hình hiển thị kết quả

tan⁻¹(Ans
1.534477477

Ghi vào màn hình: $\frac{\pi}{2} - \text{Ans}$ ấn = ta được kết quả

π/2-Ans
0.03631884947

Vậy góc cần tìm là: 0,0363 (rad).

Ví dụ 4. Tìm giá trị a, b nếu đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $M(5;-4)$ và là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x - 3 + \frac{2}{x}$.

(Đề thi HSG MTCT Bộ GD 2007 Bổ túc).

Lời giải và đáp số

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M(5;-4)$ nên b = - 5a - 4.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; f(x_0))$ có phương trình $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Đường thẳng $y = ax - 5a - 4$ là tiếp tuyến khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = f'(x_0) \\ -5a - 4 = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được giá trị của a rồi tìm được giá trị tương ứng của b.

Đáp số: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} a = \frac{7}{25} \\ b = -\frac{27}{5} \end{cases}$.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Cho hàm số $f(x) = (2\sin x - \cos x).e^x$

Tìm giá trị gần đúng của a, b để đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $x = \frac{\pi}{7}$.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Đồng Tháp 2012).

Hướng dẫn thực hành

Tìm a bằng cách: $a = \frac{d}{dx}\left(\left(2\sin x - \cos x\right)e^x\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{7}}$

Tìm b bằng cách: $b = \left(2\sin\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}\right)e^{\frac{\pi}{7}} - a.\frac{\pi}{7}$

Đáp số: $a \approx 3,45024951$; $b \approx -1,600476002$

BT 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{17x - 11}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$

Tìm giá trị gần đúng của a, b để đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $x = 2 + \sqrt{3}$

Hướng dẫn thực hành

Tìm a bằng cách: $a = \frac{d}{dx}\left(\frac{17x - 11}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\right)\Big|_{x=2+\sqrt{3}}$

Tìm b bằng cách: $b = \frac{17\left(2+\sqrt{3}\right) - 11}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(2+\sqrt{3}\right) + 3}} - a.\left(2+\sqrt{3}\right)$

Đáp số: $a \approx 1,382064324$; $b \approx 5,685490074$

BT 3. (Quảng Trị 2012). Cho hàm số $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 2}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng tại A, và cắt tiệm cận ngang tại B sao cho $\widehat{IAB} = \alpha$, trong đó I là tâm đối xứng của (C) và α là góc tạo bởi $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\right)^2}}$.

Hướng dẫn thực hành

Do $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\right)^2}} \Rightarrow \alpha = 7^0 30'$

Tam giác IAB vuông tại I, có $\widehat{IAB} = \alpha$ nên $\widehat{IBA} = 90^0 - \alpha$.

Với $x \neq -2$ ta có $f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq 2.$

Chứng tỏ tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc dương.

Do đó $k = \tan\left(90^0 - \alpha\right) = \cot\alpha$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với (C)

Ta có $f'(x_0) = k \Leftrightarrow \dfrac{7}{(x_0+2)^2} = \cot\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 \approx -1,0400 \\ x_0 \approx -2,9600 \end{array}\right.$

Với $x_0 \approx -1,0400 \Rightarrow y_0 \approx -5,2918$ có phương trình tiếp tuyến là:

$y = 7,5958x + 2,6079$

Với $x_0 \approx -2,9600 \Rightarrow y_0 \approx 9,2918$ có phương trình tiếp tuyến là:

$y = 7,5958x + 31,7751$

BT 6. Viết phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + x - 2$ đi qua điểm A(1;-4).

(Trích đề thi HSGMT Toàn quốc 2009 - Toán 12 THPT)

Hướng dẫn thực hành

Phương trình đường thẳng đi qua điểm A(1;-4) là: $y = k(x-1) - 4$

Để đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho thì hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 + x - 2 = k(x-1) - 4 & (1) \\ k = 3x^2 - 8x + 1 & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1) ta được: $x^3 - 4x^2 + x - 2 = 3x^2 - 8x + 1(x-1) - 4$

Ghi vào màn hình: $X^3 - 4X^2 + X - 2 = 3X^2 - 8X + 1(X-1) - 4$

Ấn SHIFT CALC nhập 0 ấn = kết quả X = 1.

Ấn SHIFT CALC nhập 5 = kết quả X = 1,5.

Thử lại với các giá trị ban đầu của X khác nhau ta đều nhận được hai kết quả trên.

Ghi vào màn hình: $3X^2 - 8X + 1$

Ấn CALC nhập 1 = kết quả: $-4 \Rightarrow k = -4$

Suy ra phương trình tiếp tuyến: $y = -4x$

Ấn CALC nhập 1,5 = kết quả: $4,25 \Rightarrow k = -4,25$

Suy ra phương trình tiếp tuyến: $y = -4,25x + 0,25$

Đáp số: Có hai phương tiếp tuyến: $y = -4x$, $y = -4,25x + 0,25$.

Chủ đề 2: DÃY SỐ

Thuật toán tính các số hạng của dãy số

Các thuật toán sau được xây dựng nhằm để tìm các số hạng của dãy số. Học sinh thực hiện đúng các thao tác sẽ cho ra các số hạng của dãy số sau mỗi lần lặp. Từ đó, tùy thuộc vào yêu cầu bài toán để quan sát và rút ra được các quy luật, các dự đoán... Hiển nhiên, một kết quả dự đoán chưa hẳn là đúng và để khẳng định tính đúng của nó ta phải dùng lập luận toán học để chứng minh như quy nạp, phản chứng... Trong phần này, chúng tôi sẽ không trình bày cách chứng minh tính đúng các kết quả đó mà tạm chấp nhận và chú trọng vào khả năng quan sát, phát hiện quy luật và dự đoán của học sinh.

Dạng 1. DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC SỐ HẠNG TỔNG QUÁT $u_n = f(n), n \in \mathbb{N}^*$

Trong đó $f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo ban đầu

  Đưa 0 vào ô nhớ X bằng cách: [0] [SHIFT] [RCL] (STO) [)] (X) {Biến đếm}

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình $X = X + 1 : A = f(X)$

  {Biến đếm X bắt đầu chạy từ 1; $f(X)$ chính là hàm số $f(n)$, trong đó vai trò của n được thay bởi X}

- *Bước 3*: Lặp

- Ấn phím [CALC] sau đó lặp lại dấu [=] {Đối với ES} hoặc
- Ấn và lặp lại phím [=] {Đối với MS}.

Chú thích:

- Sau mỗi lần bấm phím [=], biến X tự động tăng thêm 1 đơn vị.
- Kể từ đây về sau, những phần đặt trong cặp dấu { } mang ý nghĩa giải thích câu lệnh.
- Ở bước 3 của thuật toán này cũng sẽ xuất hiện ở các thuật toán khác trong phần dãy số. Do đó, thay vì viết đầy đủ như bước 3 ở trên, ta sẽ viết gọn lại: "*Bước 3*: Lặp"

Ví dụ. Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$u_n = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2, \text{ với } n = 1,2,...$$

Tìm tất cả các số hạng của dãy số chia hết cho 10.

Hướng dẫn thực hành

Thực hiện quy trình bấm phím theo thuật toán trên

Lưu 0 vào ô nhớ X bằng cách: [0] [SHIFT] [RCL] [)]

Ghi vào màn hình: $X = X+1 : A = X^2 + (X+1)^2 + (X+2)^2 + (X+3)^2$ bằng cách:

[ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [(] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [x^2] [+] [(] [ALPHA] [)] [+] [2] [)] [x^2] [+] [(] [ALPHA] [)] [+] [3] [)] [x^2]

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=]

Ta được dãy các số hạng sau:

$u_1 = 30; u_2 = 54; u_3 = 86; u_4 = 126; u_5 = 174; u_6 = 230; u_7 = 294; u_8 = 366; u_9 = 446;$
$u_{10} = 534; u_{11} = 630; u_{12} = 734; u_{13} = 846; u_{14} = 966; u_{15} = 1094; u_{16} = 1230;$
$u_{17} = 1374; u_8 = 1526; u_{19} = 1686; u_{20} = 1854; u_{21} = 2030; u_{22} = 2214; u_{23} = 2406;$
$u_{24} = 2606; u_{25} = 2814; u_{26} = 3030; u_{27} = 3254, ...$

Quan sát dãy số trên ta thấy rằng $u_1; u_6; u_{11}; u_{16}; u_{21}; u_{26}, ...$ chia hết cho 10. Do đó ta dự đoán được rằng các số hạng u_k với $k = 5t+1$, $t = 0,1,2,...$ thì chia hết cho 10.

Ví dụ 2. Cho dãy số $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$. Gọi $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Tính $S_{16}; S_{2013}$.

(Đề thi HSG MTCT Quảng Trị 2013)

Hướng dẫn thực hành

Chọn máy chế độ rad: [SHIFT] [MODE] [4]

Đưa $0 \to X$ bằng cách: [SHIFT] [MODE] [4] {biến đếm}

Đưa $0 \to C$ bằng cách: [SHIFT] [RCL] [hyp] {biến tổng}

Ghi vào màn hình: $X = X+1 : C = C + \sin\left(\frac{X\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{X\pi}{3}\right)$ bằng cách:

[ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [sin] [▭/▭] [ALPHA] [)] [SHIFT] [x10ˣ] [▼] [3] [▶] [)] [+] [cos] [▭/▭] [ALPHA] [)] [SHIFT] [x10ˣ] [▼] [3] [▶] [)]

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=] đến khi $X = X+1 = 16$ ta được

$$S_{16} = \frac{-3+\sqrt{3}}{2} \approx -0,6340$$

Math ▲
C=C+sin(Aπ/3)+cos▷
$\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$

Ta có $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{3}\right)$ nên $u_r = u_{6k+r}$

Vì $2013 = 335 \times 6 + 3$ nên

$S_{2013} = 335\left(u_1 + u_2 + ... + u_6\right) + \left(u_1 + u_2 + u_3\right) \approx 0,7321$.

Lập thuật toán tương tự như ta tính được $S_3 = -1 + \sqrt{3}, S_6 = 0$

Do đó $S_{2013} \approx 0,7321$.

Dạng 2. DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI DẠNG

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Trong đó $f(u_n)$ là biểu thức của u_n, a là hằng số cho trước.

Thuật toán 1

- *Bước 1*: Khai báo ban đầu

  Nhập giá trị của số hạng u_1: a [=]

- *Bước 2*: Nhập biểu thức của $u_{n+1} = f(u_n)$ bằng cách: Trong biểu thức của u_{n+1} chỗ nào có u_n ta nhập bằng [Ans]

- *Bước 3*: Lặp.

Thuật toán 2

- *Bước 1*: Gán $A = 1$ bằng cách [1] [SHIFT] [RCL] (STO) [(−)] (A) {Biến đếm}

  Gán $B = a$ bằng cách a [SHIFT] [RCL] (STO) [°'''] (B) {Giá trị u_1}

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình $A = A + 1 : B = f(B)$ hoặc có thể gán thêm một biến trung gian C như sau: $A = A + 1 : C = f(B) : B = C$

- *Bước 3*: Lặp.

Nhận xét: Đối với thuật toán 1 tuy đơn giản nhưng ta phải đếm các số hạng bằng miệng, rất dễ nhầm lẫn. Thuật toán 2 máy sẽ tự động hiển thị số hạng thứ mấy của dãy.

Ví dụ 1. Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2^{u_n}}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tính giới hạn đó.

Thực hiện quy trình bấm phím theo thuật toán 2

Lưu 1 vào ô nhớ A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Lưu $\sqrt{2}$ vào ô nhớ B bằng cách: [√▭] [2] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Ghi vào màn hình: $A = A + 1 : B = \sqrt{2^B}$ bằng cách:

[ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [CALC] [√▭] [2] [x▫] [ALPHA] [°'"]

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=]

Bảng quan sát:

n	u_n	*n*	u_n
1	*1,414213562*	...	
2	*1,632526919*	...	
3	*1,760839556*	45	*1,999999957*
4	*1,840910869*	46	*1,999999970*
5	*1,892712697*	47	*1,999999979*
6	*1,926999702*	48	*1,999999984*
7	*1,950034774*	49	*1,999999990*
8	*1,965664887*	50	*1,999999993*
9	*1,976341754*	51	*1,999999995*
10	*1,983668399*	52	*1,999999997*
11	*1,988711773*	53	*1,999999998*
12	*1,992190883*	54	*1,999999998*
13	*1,994594451*	54	*1,999999999*
14	*1,996256666*	55	*1,999999999*
15	*1,997407001*	56	*1,999999999*
16	*1,998203478*	57	*1,999999999*
17	*1,998755133*	58	*2*
18	*1,99913731*	59	*2*
19	*1,999402119*	60	*2*

Dựa vào bảng quan sát ta thấy

- Dãy số (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 2.
- Dự đoán giới hạn của dãy số bằng 2.

Nhận xét: Như đã trình bày trong thuật toán, ta có thể tìm các số hạn theo thuật toán sau:

Đưa $1 \to A$; $\sqrt{2} \to B$. Ghi vào màn hình: $A = A+1 : C = \sqrt{2^B} : B = C$

Ấn [=] sau đó lặp lại phím [=] ta được bảng giá trị như trên.

Ví dụ 2. Cho dãy số được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt[3]{3} \\ u_{n+1} = (u_n)^{\sqrt[3]{3}}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để u_n là số nguyên.

Hướng dẫn thực hành

Cách 1: Sử dụng thuật toán 1 tính các số hạng của dãy số (sau mỗi lần bấm phím [=] phải đếm bằng miệng)

[SHIFT] [√■] [3] [=] [Ans] [x■] [SHIFT] [√■] [3] [=] [=] [=] $\{u_4 = 3\}$

Vậy $n = 4$ là số tự nhiên nhỏ nhất để $u_4 = 3$ là số nguyên.

Cách 2: Sử dụng thuật toán 2, gán thêm một biến đếm

Đưa $1 \to A$ bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Đưa $\sqrt[3]{3} \to B$ bằng cách: [SHIFT] [√■] [3] [SHIFT] [RCL] [°'''']

Ghi vào màn hình: $A = A+1 : B = B^{\sqrt[3]{3}}$

[ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫■] [ALPHA] [°''''] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [°''''] [x■] [SHIFT] [√■] [3]

Ấn [CALC] lặp lại phím [=] đến khi $A = A+1 = 4$ ta được giá trị $B = 3$

Math ▲
$B=B^{\sqrt[3]{3}}$
3

Vậy $n = 4$ là số tự nhiên nhỏ nhất để $u_4 = 3$ là số nguyên.

Lời bình: Thuật toán 1 đơn giản hơn nhưng có nhược điểm nếu yêu cầu tìm số hạng lớn thí đếm rất dễ nhầm lẫn. Thuật toán 2 phức tạp hơn nhưng máy tự động đếm {số hạng tương ứng sau mỗi phím [=]}. Đề bài cho $\sqrt[3]{3}$ xuất hiện ở hai lần, điều này không ít học sinh nhầm lẫn, cụ thể là xem $\sqrt[3]{3}$ như là số hạn của u_1 và cũng là số mũ của biểu thức thứ 2.

Ví dụ 3. Tính giá trị của A, biết $A = \sqrt{2007 + \sqrt{2007 + \sqrt{2007 + ... + \sqrt{2007}}}}$ (dấu căn tiến tới vô tận)

Hướng dẫn thực hành

Cách 1: Bình phương hai vế của phương trình, ta có:

$A^2 = 2007 + A \Leftrightarrow A^2 - A - 2007 = 0$

Dùng máy tính giải ta được: A = 45,30234369 hoặc A = - 44,30234369

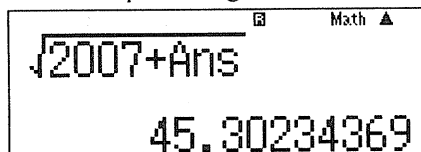
Vì $A \geq 0$ nên A = 45,30234369

Vậy A = 45,30234369.

Cách 2: Ấn $\sqrt{2007}$ [=]

Ghi vào màn hình: $\sqrt{2007 + \text{Ans}}$

Ấn [=]....[=] cho đến khi kết quả không đổi



Đáp sô: A = 45,30234369.

Dạng 3: DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI DẠNG

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = f(n, u_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Trong đó $f(n, u_n)$ là biểu thức u_{n+1} tính theo u_n và n, a là hằng số cho trước.

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo ban đầu

  Đưa 1 vào ô nhớ A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] (STO) [(–)] (A) {*biến đếm*}

  Đưa a vào ô nhớ B bằng cách: a [SHIFT] [RCL] (STO) [°'''] (B)

  {*giá trị của* u_1 }

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình $C = f(A,B) : A = A + 1 : B = C$

  { C là giá trị của u_A sau khi A tăng lên 1 đơn vị}

- *Bước 3*: Lặp.

Ví dụ. Cho dãy số được xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(a_n + 1), \ n \in N^* \end{cases}$$. Tính u_{2012}.

Hướng dẫn thực hành

Đưa $1 \to A$ bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(–)]

Đưa $0 \to B$ bằng cách: [0] [SHIFT] [RCL] [°''']

Ghi vào màn hình: $C = \frac{A(A+1)}{(A+2)(A+3)}(B+1) : A = A+1 : B = C$ bằng cách:

[ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [$\frac{\square}{\square}$] [ALPHA] [(−)] [(] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [)] [▼] [(] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [)] [(] [ALPHA] [(−)] [+] [3] [)] [▶] [(] [ALPHA] [°’’’] [+] [1] [)] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [°’’’] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp]

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=]

Ta được các giá trị của dãy: $\frac{1}{6}, \frac{7}{20}, \frac{27}{50}, \frac{11}{15}, \frac{13}{14}, \frac{9}{8}, \ldots$

Ta phân tích các số hạng của dãy để tìm quy luật của dãy số:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{6} = \frac{5}{30} = \frac{1.5}{3.10} \\ a_3 = \frac{7}{20} = \frac{2.7}{40} = \frac{2.7}{4.10} \\ a_4 = \frac{27}{50} = \frac{3.9}{50} = \frac{3.9}{5.10} \\ \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Dự đoán công thức tổng quát là: } u_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}.$$

Bằng quy nạp ta có thể dễ dàng chứng minh được công thức tổng quát trên.

Do đó: $u_{2012} = \frac{2011(2.2012+1)}{10.2013} = \frac{8094275}{20130}$.

Dạng 4. DÃY TUYẾN TÍNH CẤP HAI THUẦN NHẤT:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = mu_{n-1} + pu_{n-2} + q \end{cases}, \text{ với } n \geq 3.$$

Trong đó: a, b, m, p, q là các hằng số cho trước.

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo ban đầu

  Đưa u_1 vào ô nhớ A bằng cách: a [SHIFT] [RCL] (STO) [(−)] (A)

  Đưa u_2 vào ô nhớ B bằng cách: b [SHIFT] [RCL] (STO) [S⇔D] [°’’’] (B)

  Đưa 2 vào ô nhớ D bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] (STO) [sin] (D)

  {Biến đếm}

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình

  $D = D+1 : A = mB + pA + q : D = D+1 : B = mA + pB + q$

  {D = 3 *tức bắt đầu tính từ số hạng thứ 3*}

- *Bước 3*: Lặp.

Ví dụ 1. Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1; \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Chứng minh rằng $A = 4a_n.a_{n+2} + 1$ là số chính phương.

Hướng dẫn thực hành

Đưa $1 \to A$ bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Đưa $3 \to B$ bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Đưa $2 \to D$ bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [sin]

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = 2B - A + 1 : D = D + 1 : B = 2A - B + 1$ bằng cách

[ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [°'"] [−] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [(−)] [−] [ALPHA] [°'"] [+] [1]

Bấm [CALC] và lặp lại phím [=]

Ta được dãy số hạng :

$u_1 = 1; u_2 = 3; u_3 = 6; u_4 = 10; u_5 = 21; u_6 = 28; u_7 = 36, \ldots$

Ta phân tích các số hạng để tìm quy luật của dãy số:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1 = \dfrac{1(1+1)}{2} \\ u_2 = 3 = \dfrac{2(2+1)}{2} \\ u_3 = 6 = \dfrac{3(3+1)}{2} \\ \ldots. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Dự đoán công thức tổng quát của dãy là } u_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh công thức tổng quát trên là đúng.

Từ đó : $A = 4a_n a_{n+2} + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = \left(n^2 + 3n + 1\right)^2$.

Do đó, A là số chính phương.

Cách khác: Từ kết quả tìm được một số số hạng đầu của dãy, ta thấy:

- Với $n = 1$ thì $A = 4a_1a_3 + 1 = 4.1.6 + 1 = 25 = (2a_2 - 1)^2$
- Với $n = 2$ thì $A = 4a_2a_4 + 1 = 4.3.10 + 1 = 121 = (2a_3 - 1)^2$
- Với $n = 3$ thì $A = 4a_3a_5 + 1 = 4.4.15 + 1 = 361 = (2a_4 - 1)^2$

Từ đó ta chứng minh $A = 4a_n a_{n+2} + 1 = (2a_{n+1} - 1)^2$ (*).

Ví dụ 2. Tính giá trị của biểu thức

$$A=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{25}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{25}+\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{26}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{26}$$

(Trích đề thi HSG MTCT Casio TPHCM, 2006-2007)

Hướng dẫn thực hành

Đặt $U_n=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$

Ta chứng minh được: $\begin{cases} U_1=5; U_2=15 \\ U_n=5U_{n-1}-5U_{n-2}; n\geq 3 \end{cases}$

Ta có: $A=U_{25}+U_{26}$

$U_{26}=5U_{25}-5U_{24}\Rightarrow U_{25}=U_{24}+\frac{1}{5}U_{26}$

Suy ra $A=U_{24}+\frac{6U_{26}}{5}$

Biến đổi ta được:

$$U_{24}=\left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{12}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{12}\right)^{2}-2.\left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\right)^{12}$$

$$=U_{12}^2-2.5^{12}=U_{12}^2-488281250$$

$$U_{26}=\left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{13}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{13}\right)^{2}-2.\left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\right)^{13}$$

$$=U_{13}^2-2.5^{13}=U_{13}^2-2441406250$$

Quy trình bấm phím tính $U_{12}^2; U_{13}^2$

Lưu 2 vào C bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [hyp]

Lưu 5 vào A bằng cách: [5] [SHIFT] [RCL] [(-)]

Lưu 15 vào B bằng cách: [1] [5] [SHIFT] [RCL] [°,,,]

Ghi vào màn hình: C=C+1:A=5B-5A:C=C+1:B=5A-5B bằng cách:

[ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [(-)] [ALPHA] [CALC] [5] [ALPHA] [°,,,] [−] [5] [ALPHA] [(-)] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°,,,] [ALPHA] [CALC] [5] [ALPHA] [(-)] [−] [5] [ALPHA] [°,,,]

Bấm [CALC] và lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi C =C+1= 12

C=C+1
12

Bấm ⊟ ta có giá trị của U_{12} là 5031250

B=5A−5B
5031250

Bấm ⊟...⊟ cho đến khi C =C+1= 13

C=C+1
13

Bấm ⊟ ta có giá trị của U_{13} là 18203125

A=5B−5A
18203125

Dùng máy tính kết hợp với tính toán bằng tay ta được:

U_{12}^2 =2531347656250

Suy ra $U_{24}= U_{12}^2$ - 488281250=2531298828125O

Tương tự ta tính được: $U_{26}=U_{13}^2$ -2441406250=331351318359375

Suy ra $A=U_{24}+\frac{6U_{26}}{5}$ =422934570312500

Vậy A = 422934570312500 .

Bằng phương pháp quy nạp ta cũng dễ dàng chứng minh được (*) là đúng.

Dạng 5. DÃY LUCAS BẬC BA DẠNG SUY RỘNG:

$$\begin{cases} u_1 = a,\ u_2 = b,\ u_3 = c \\ u_{n+1} = mu_n + pu_{n-1} + qu_{n-2} \end{cases},\ n \geq 3.$$

Trong đó: a, b, c, m, p, q là các hằng số cho trước.

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo ban đầu

Đưa u_1 vào ô nhớ A bằng cách: a SHIFT RCL (STO) (−) (A)

Đưa u_2 vào ô nhớ B bằng cách: b [SHIFT] [RCL] (STO) [°’’’] (B)

Đưa u_3 vào ô nhớ C bằng cách: c [SHIFT] [RCL] (STO) [hyp] (C)

Đưa 3 vào ô nhớ D bằng cách: 3 [SHIFT] [RCL] [sin] (D) {biến đếm}

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình

  $D = D + 1 : A = mC + pB + qA : D = D + 1 : B = mA + pC + qB :$
  $D = D + 1 : C = mB + pA + qC$

  { D =4 tức bắt đầu tính từ số hạng thứ 4}.
- *Bước 3*: Lặp.

Ví dụ. Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1} + 4u_{n-2} \end{cases}$, với $n \geq 3$.

Tính u_{20}.

Hướng dẫn thực hành

Đưa $1 \to A$ bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Đưa $2 \to B$ bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [°’’’]

Đưa $3 \to C$ bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [hyp]

Đưa $3 \to D$ bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [sin]

Ghi vào màn hình:

$D = D + 1 : A = 2C + 3B + 4A : D = D + 1 : B = 2A + 3C + 4B :$
$D = D + 1 : C = 2B + 3A + 4C$

Bằng cách:

[ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [hyp] [+] [3] [ALPHA] [°’’’] [+] [4] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [°’’’] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [(−)] [+] [3] [ALPHA] [hyp] [+] [4] [ALPHA] [°’’’] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [°’’’] [+] [3] [ALPHA] [(−)] [+] [4] [ALPHA] [hyp]

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=]

Kết quả: $u_4 = 16; u_5 = 49; u_6 = 158; u_7 = 527; \ldots; u_{20} = 2715742016$.

Dạng 6. DÃY PHI TUYẾN CÓ DẠNG

$$\begin{cases} u_1 = a,\ u_2 = b \\ u_{n+1} = mu_n^2 + pu_{n-1}^2 \end{cases}, \text{với } n \geq 2.$$

Trong đó: a, b, m, p **là các hằng số.**

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo ban đầu

Đưa u_1 vào ô nhớ A bằng cách: a SHIFT RCL (STO) (−) (A)

Đưa u_2 vào ô nhớ B bằng cách: b SHIFT RCL (STO) °'" (B)

Đưa 2 vào ô nhớ D bằng cách: 2 SHIFT RCL (STO) °'" (D) {Biến đếm}

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình

$D = D + 1 : A = mB^2 + pA^2 : D = D + 1 : B = mA^2 + pB^2$

{ $D = 3$ tức bắt đầu tính từ số hạng thứ 3}

- *Bước 3*: Lặp.

Ví dụ. Cho dãy số: $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n^2 - 2u_{n-1}^2 \end{cases}$. Tính u_5.

Hướng dẫn thực hành

Đưa $1 \to A$ bằng cách: 1 SHIFT RCL (−)

Đưa $2 \to B$ bằng cách: 2 SHIFT RCL °'"

Đưa $2 \to D$ bằng cách: 2 SHIFT RCL sin

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = 3B^2 - 2A^2 : D = D + 1 : B = 3A^2 - 2B^2$

Bằng cách:

1 SHIFT RCL (−) 2 SHIFT RCL °'" 2 SHIFT RCL sin ALPHA sin ALPHA CALC ALPHA sin +
1 ALPHA ∫□ ALPHA (−) ALPHA CALC 3 ALPHA °'" x^2 − 2 ALPHA (−) x^2 ALPHA ∫□ ALPHA sin
ALPHA CALC ALPHA sin + 1 ALPHA ∫□ ALPHA °'" ALPHA CALC 3 ALPHA (−) x^2 − 2 ALPHA °'"

Ấn CALC và lặp lại phím =. Ta được dãy các số hạng sau

$u_3 = 10;\ u_4 = 292;\ u_5 = 255592$.

Dạng 7. DẠNG PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN BẬC NHẤT

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = mu_{n-1} + f(n), n > 1 \end{cases}$$

Trong đó: a, m là hằng số cho trước.

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo ban đầu

Đưa u_1 vào ô nhớ A bằng cách: a SHIFT RCL (STO) (−) (A)

Đưa 1 vào ô nhớ D bằng cách: 1 SHIFT RCL (STO) sin (D)

Bước 2: Ghi vào màn hình $D = D + 1 : A = mA + f(D)$

{ $D = 2$ tức bắt đầu tính từ số hạng thứ 2}

- *Bước 3*: Lặp.

Ví dụ. Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_n = 3u_{n-1} + n^3 \end{cases}$. Lập quy trình tính u_{20}.

Hướng dẫn thực hành

Đưa $-3 \to A$ bằng cách: [−] [3] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Đưa $1 \to D$ bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [sin]

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = 3A + D^3$ bằng cách:

[ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [√▭] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [3] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [sin] [x■] [3]

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=]

Ta được kết quả: $u_2 = -1; u_3 = 24; u_4 = 136; u_5 = 533; ....; u_{20} = 9733934792$

Dạng 8. DẠNG PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN BẬC HAI:

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = mu_{n-1} + pu_{n-2} + f(n), n > 2 \end{cases}$$

Trong đó: a, b, m, p **là các hằng số.**

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo các giá trị ban đầu

  Đưa u_1 vào ô nhớ A bằng cách: a [SHIFT] [RCL] (STO) [(−)] (A)

  Đưa u_2 vào ô nhớ B bằng cách: b [SHIFT] [RCL] (STO) [°'''] (B)

  Đưa 2 vào ô nhớ D bằng cách:

  2 [SHIFT] [RCL] (STO) [sin] (D) {Biến đếm}

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình

  $D = D + 1 : A = mB + pA + f(D) : D = D + 1 : B = mA + pB + f(D)$

- *Bước 3*: Lặp.

Ví dụ. Cho dãy số: $\begin{cases} u_0 = 5, u_1 = 3 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2} - n^2 + 3n \end{cases}$. Tìm u_{20}.

Hướng dẫn thực hành

Đưa $5 \to A$ bằng cách: [5] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Đưa $3 \to B$ bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [°''']

Đưa $1 \to D$ bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [sin]

Ghi vào màn hình:

$D = D + 1 : A = 2B + 3A - D^2 + 3D : D = D + 1 : B = 2A + 3B - D^2 + 3D$ bằng cách

ALPHA sin ALPHA CALC ALPHA sin + 1 ALPHA ∫ ALPHA (−) ALPHA CALC 2 ALPHA °''' + 3 ALPHA (−) + 3 ALPHA sin − ALPHA sin x^2 ALPHA ∫ ALPHA sin ALPHA CALC ALPHA sin + 1 ALPHA ∫ ALPHA °''' ALPHA CALC 2 ALPHA (−) + 3 ALPHA °''' − ALPHA sin x^2 + 3 ALPHA sin

Ấn CALC và lặp lại phím =

Ta được kết quả: $u_2 = 23; u_3 = 55; u_4 = 175; u_5 = 505; ....; u_{20} = 2397164367$.

Dạng 9. HỆ DÃY SỐ CẤP HAI

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases} \text{ với } \begin{cases} u_1 = m \\ v_1 = p \end{cases}$$

Trong đó: a, b, c, d, m, p là các hằng số cho trước.

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo ban đầu

  Đưa u_1 vào ô nhớ A bằng cách: m SHIFT RCL (STO) (−) (A)

  Đưa v_1 vào ô nhớ B bằng cách: p SHIFT RCL (STO) °''' (B)

  Đưa 1 vào ô nhớ D bằng cách: 1 SHIFT RCL (STO) sin (D) {Biến đếm}

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình

  $D = D + 1 : X = aA + bB : Y = cA + dB : A = X : B = Y$

  {X, Y lần lượt là giá trị của u_n, v_n}

- *Bước 3*: Lặp.

Ví dụ. Cho dãy số xác định bởi: $\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} + 4y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases}$ với $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Lập quy trình tính $(x_5; y_5)$.

Hướng dẫn thực hành

Đưa $3 \to A$ bằng cách: 3 SHIFT RCL (−)

Đưa $2 \to B$ bằng cách: 2 SHIFT RCL °'''

Đưa $0 \to D$ bằng cách: 0 SHIFT RCL sin

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : X = 3A + 4B : Y = 2A + 3B : A = X : B = Y$ bằng cách:

ALPHA sin ALPHA CALC ALPHA sin + 1 ALPHA ∫ ALPHA) ALPHA CALC 3 ALPHA (−) + 4 ALPHA °''' ALPHA ∫ ALPHA S⇔D ALPHA CALC 2 ALPHA (−) + 3 ALPHA °''' ALPHA ∫ ALPHA (−) ALPHA CALC ALPHA) ALPHA ∫ ALPHA °''' ALPHA CALC ALPHA S⇔D

Ấn CALC và lặp lại phím =

Ta được kết quả $(x_5; y_5) = (19601; 13860)$.

Dạng 10. HỆ DÃY SỐ CẤP HAI CHẴN LẺ:

$$u_{n+2}=\begin{cases}au_{n+1}+bu_n, & n=2k+1\\ cu_{n+1}+du_n, & n=2k\end{cases}\quad \text{với}\ \begin{cases}u_0=m\\ u_1=p\end{cases}$$

Thuật toán

- *Bước 1*: Khai báo các giá trị ban đầu

  Đưa u_1 vào ô nhớ A bằng cách: m [SHIFT] [RCL] (STO) [(−)] (A)

  Đưa u_2 vào ô nhớ B bằng cách: p [SHIFT] [RCL] (STO) [°'"] (B)

  Đưa 2 vào ô nhớ D bằng cách: 2 [SHIFT] [RCL] (STO) [sin] (D) {Biến đếm}

- *Bước 2*: Ghi vào màn hình $D=D+1:A=aB+bA:D=D+1:B=cA+dB$
- *Bước 3*: Lặp.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1=1,\ u_2=2,\quad u_{n+2}=\begin{cases}2u_{n+1}+3u_n;n=2k+1\\ 3u_{n+1}+2u_n;n=2k\end{cases}$$

a) Tính các giá trị của u_{10}, u_{15}, u_{21}

b) Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của (u_n). Tính S_{10}, S_{15}, S_{20}

(Trích đề thi HSG MTCT Phú Yên , THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Đưa $1\rightarrow A$ bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Đưa $2\rightarrow B$ bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Đưa $2\rightarrow D$ bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [sin]

Lưu 3 vào X bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [)] {biến tổng}

Ghi vào màn hình:D=D+1:A=2B+3A:X=X+A:D=D+1:B=3A+2B:X=X+B bằng cách:

[2] [SHIFT] [RCL] [°'"] [2] [SHIFT] [RCL] [sin] [AC] [1] [SHIFT] [RCL] [(−)] [2] [SHIFT] [RCL] [°'"] [2] [SHIFT] [RCL] [sin] [3] [SHIFT] [RCL] [)] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [□/□] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [°'"] [+] [3] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [□/□] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [□/□] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [□/□] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [CALC] [3] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [□/□] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [°'"]

Bấm [CALC] và lặp lại phím bằng cho đến khi D= D+ 1 = 10

C=C+1
10

Bấm [=] ta được giá trị u_{10} là 28595

B=3A+2B
28595

Bấm [=] ta được giá trị S_{10} là 40149

X=X+B
40149

Bấm [=]... [=] cho đến khi D = D + 1 = 15

D=D+1
15

Bấm [=] ta được giá trị u_{15} là 8725987

A=2B+3A
8725987

Bấm [=] ta được giá trị S_{15} là 13088980

X=X+A
13088980

Bấm [=]... [=] cho đến khi D = D + 1 = 20,

D=D+1
20

Bấm [=] [=] ta được giá trị S_{20} là 4942439711

X=X+B
4942439711

Bấm [=] ... [=] cho đến khi D = D + 1 = 21

D=D+1 (Math ▲Disp)
21

Bấm [=] ta được giá trị u_{21} là 9884879423

A=2B+3A (Math ▲Disp)
9884879423

Vậy

$u_{10} = 28595$; $S_{10} = 40149$; $u_{15} = 8725987$; $S_{15} = 13088980$;
$S_{20} = 4942439711$; $u_{21} = 9884879423$.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Dãy số (u_n) được cho bởi công thức $u_n = 2n + \frac{2009}{n^2}$, với mọi n nguyên dương. Tìm số hạng nhỏ nhất của dãy số đó.

Lời giải và đáp số

Đặt $f(x) = 2x + \frac{2009}{x^2}$, $x \in [1; +\infty)$

$$f'(x) = 2 - \frac{4018}{x^3} = \frac{2x^3 - 4018}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{4018}{2}} \approx 12.618$$

Hàm số nghịch biến trên $[1; 12,618]$, đồng biến trên $[12,618; +\infty]$

$\Rightarrow$ Dãy số (u_n) đạt giá trị nhỏ nhất tại n=12 hoặc n=13

Tính u_{12}, u_{13}

Ghi vào màn hình: $2X + \frac{2009}{X^2}$

Ấn [CALC] nhập 12 ấn [=] Kết quả: $\frac{5465}{144} = 37,9513(8)$

Ấn [CALC] nhập 13 ấn [=]. Kết quả: $\frac{6403}{169} = 37,(88757396449...)$

Suy ra số hạng nhỏ nhất của dãy số là $u_{13} = \frac{5465}{144}$

Nhận xét: Đối với bài trên, ngoài cách giải bằng phương pháp đạo hàm ta có thể sử dụng bất đẳng thức cô-si như sau: $2n+\frac{2009}{n^2}=n+n+\frac{2009}{n^2}\geq 3\sqrt[3]{2009}$

Dấu "=" xảy ra khi $n=n=\frac{2009}{n^2}\Leftrightarrow n=\sqrt[3]{2009}\approx 12,618$

Vì $n\in N^*$ nên ta xét giá trị $n=12, n=13$.

BT 2. Cho dãy số $(U_n):U_1=\sqrt{3};U_2=\sqrt{3+\sqrt{3}};U_n=\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+...+\sqrt{3}}}}$ (n dấu căn). Tính U_{2009}.

(Trích đề thi HSG MTCT tỉnh Thanh Hóa - 2009 đề B)

Lời giải và đáp số

Ấn [3] [=]. Nhập: $\sqrt{3+Ans}$

Ấn [=]...[=] 2009 lần hoặc đến khi có 2 kết quả liên tiếp bằng nhau.

Kết quả: 2,302775638

Vậy $U_{2009}=2,302775638$.

BT 3. Cho dãy số (a_n) được xác định theo công thức:

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=4a_{n+1}+3a_n$ với mọi n nguyên dương.

Hãy tính giá trị của a_{15}.

(Trích đề thi HSG MTCT Thanh Hóa, THPT, 2006-2007)

Hướng dẫn thực hành

Lưu 1 vào A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Lưu 2 vào B bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Lưu 2 vào C bằng cách: [SHIFT] [RCL] [hyp] {biến đếm}

Ghi vào màn hình: $C=C+1:A=4B+3A:C=C+1:B=4A+3B$ bằng cách:

[ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [√■] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [4] [ALPHA] [°'"] [+] [3] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [√■] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [√■] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [CALC] [4] [ALPHA] [(−)] [+] [3] [ALPHA] [°'"]

Bấm [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi C=C+1=15

```
C=C+1                Math ▲Disp

                           15
```

Bấm [=] ta có giá trị của a_{15} là 1090820819

Math ▲Disp
A=4B+3A
1090820819

Vậy $a_{15} = 1090820819$.

BT 4. Cho $u_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{3}{4^2} + ... + (i)\frac{n-1}{n^2}$ ($i = 1$ nếu n lẻ, $i = -1$ nếu n chẵn, $n \geq 2$). Tính u_{20}, u_{25}, u_{30}.

(Trích đề thi HSG MTCT Quảng Bình, BTTH, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Lưu 1 vào A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Lưu 1 vào X bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [)]

Ghi vào màn hình: $A = A + 1 : X = X + (-1)^{A+1} \times \frac{A-1}{A^2}$ bằng cách:

[ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [(] [−] [1] [)] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [▶] [×] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [ALPHA] [(−)] [−] [1] [▼] [ALPHA] [(−)] [x^2]

Bấm [CALC] và lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi A = A +1 = 20

Math ▲Disp
A=A+1
20

Bấm [=] ta được giá trị $u_{20} = 0,8474920248$

Math ▲
$X=X+(-1)^{A+1} \times \frac{A-1}{A^2}$
0.8474920248

Bấm [=] ... [=] cho đến khi A = A +1 = 25

Math ▲Disp
A=A+1
25

Bấm [=] ta được giá trị $u_{25} = 0,8895124152$

Math ▲
$X=X+(-1)^{A+1} \times \frac{A-1}{A^2}$
0.8895124152

Bấm [=] cho đến khi A = A +1 = 30,

```
                    Math ▲Disp
A=A+1

                            30
```

Bấm [=] ta được giá trị ta được giá trị $u_{30} = 0,8548281618$

Vậy $u_{20} = 0,8474920248$; $u_{25} = 0,8895124152$; $u_{30} = 0,8548281618$

Lưu ý: Ta *có thể tính* u_{20}, u_{25}, u_{30} *bằng cách dùng phím* $\sum_{\square}^{\square}\square$, *chẳng hạn:*

Để tính u_{20} *ta nhập vào màn hình:* $1+\sum_{x=2}^{20}\left(-(-1)^X \times \frac{X-1}{X^2}\right)$ *ấn phím* [=]

ta được kết quả:

```
                    Math ▲
1+ Σ(x=2..20) (-(-1)^X × (X-1)/X²)
                 0.8474920248
```

Tương tự ta tính được u_{25}, u_{30}. Tuy nhiên, dùng chức năng $\sum_{\square}^{\square}\square$ chỉ tìm được một số hạng sau mỗi lần ấn phím. Sử dụng thuật toán theo cách giải một ta có thể ghi ra được nhiều số hạng u_k, sau mỗi lần lặp.

BT 5. Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 3,\ u_2 = 5,\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} - 2$ (n là số tự nhiên và $n \geq 2$).

a) Lập quy trình bấm phím tính u_n.

b) Tính u_{33} và tổng $S_{33} = u_1 + u_2 + ... + u_{33}$.

(Trích đề thi HSG MTCT Quảng Ngãi, BTTH, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Lưu 2 vào C bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [hyp] {biến đếm}

Lưu 3 vào A bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Lưu 5 vào B bằng cách: [5] [SHIFT] [RCL] [°''']

Lưu 8 vào X bằng cách: [8] [SHIFT] [RCL] [)] {biến tổng}

Ghi vào màn hình: C=C+1:A=3B-2A-2:X=X+A:C=C+1:B=3A-2B-2:X=X+B bằng cách:

[ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [3] [ALPHA] [°'''] [−] [2] [ALPHA] [(−)] [−] [2] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [hyp]

[ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [3] [ALPHA] [(−)] [−] [2] [ALPHA] [°''']
[ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [°''']

Bấm [CALC] và lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi C = C + 1 = 33

```
C=C+1
                33
```

Bấm [=] ta có giá trị của u_{33} là 67

```
A=3B-2A-2
                67
```

Bấm [=] ta có giá trị của S_{33} là 1155

```
X=X+A
              1155
```

Vậy $u_{33} = 67\,; S_{33} = 1155$.

BT 6. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 2,\ u_2 = 3,\ u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1}$

Tính u_{12}.

(Trích đề thi HSG MTCT Kiên Giang, THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Lưu 2 vào C bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [hyp] {biến đếm}

Lưu 2 vào A bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Lưu 3 vào B bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [°''']

Ghi vào màn hình: C=C+1:A=4B+5A:C=C+1:B=4A+5B bằng cách:

[ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [4] [ALPHA] [°'''] [+] [5] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [4] [ALPHA] [(−)] [+] [5] [ALPHA] [°''']

Bấm [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi C = C + 1 = 12

```
C=C+1
                12
```

Bấm [=] ta có giá trị của u_{12} là 40690103

```
B=4A+5B
                40690103
```

Vậy u_{12}=40690103.

BT 7. Cho dãy số (u_n) xác định $u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$

a) Tính các giá trị của u_{10}, u_{20}.

b) Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của dãy (u_n). Tính S_{20}.

(Trích đề thi HSG MTCT Phú Yên, BTTH, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Lưu 2 vào C bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [hyp] {biến đếm}

Lưu 1 vào A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(–)]

Lưu 2 vào B bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Lưu 3 vào X bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [)] {biến tổng}

Ghi vào màn hình: C=C+1:A=2B+3A:X=X+A:C=C+1:B=2A+3B:X=X+B

[ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [(–)] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [°'"] [+] [3] [ALPHA] [(–)] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [(–)] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [(–)] [+] [3] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [°'"]

Bấm [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi C = C +1=10

```
C=C+1
                10
```

Bấm [=] ta có giá trị của u_{10} là 14762

```
B=2A+3B
                14762
```

Bấm [=] ... [=] cho đến khi C = C +1 = 20

```
C=C+1
                20
```

Bấm [=] ta có giá trị của u_{20} là 871696100

B=2A+3B
871696100

Bấm [=] ta có giá trị của S_{20} là 1307544150

X=X+B
1307544150

BT 8. Cho $u_1 = 33, u_2 = 122, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$. Tính $x_{14} - 5x_{13}$. Viết quy trình bấm phím.

Hướng dẫn thực hành

Lưu 2 vào A bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [(−)] {biến đếm}

Lưu 33 vào B bằng cách: [3] [3] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Lưu 122 vào C bằng cách: [1] [2] [2] [SHIFT] [RCL] [hyp]

Ghi vào màn hình: A=A+1:B=6C-9B:A=A+1:C=6B-9C bằng cách:

[ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [CALC] [6] [ALPHA] [hyp] [−] [9] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [6] [ALPHA] [°'"] [−] [9] [ALPHA] [hyp]

Bấm [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi A = A +1 = 13

A=A+1
13

Bấm [=] ta có giá trị của x_{13} (đọc giá trị tại B) là 66430125

Bấm [=] ta được A = A +1 = 14

A=A+1
14

Bấm [=] ta có giá trị của x_{14} (đọc giá trị tại C) là 211513518.

Ghi vào màn hình: C – 5B. Bấm [=] ta được – 120637107

C-5B
-120637107

Vậy $x_{14} - 5x_{13} = -120637107$.

BT 9. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 0,20022003$, $a_n = \dfrac{1}{1 - a_{n-1}}$.

Tính a_{2003}.

(Trích đề thi HSG MTCT Đồng Nai, buổi thi thứ hai, THPT, 2002-2003)

Hướng dẫn thực hành

Lưu 0,20022003 vào bộ nhớ Ans bằng cách: 0,20022003

[0] [•] [2] [0] [0] [2] [2] [0] [0] [3] [=]

Ghi vào màn hình: $\dfrac{1}{1 - \text{Ans}}$

Bấm [=] ta được giá trị của a_2 là 1,250343891

Bấm [=] ta được giá trị của a_3 là - 3,994505295

Bấm [=] ta được giá trị của a_4 là 0,20022003

Bấm [=] ta được giá trị của a_5 là 1,250343891

Bấm [=] ta được giá trị của a_6 là - 3,994505295

Bấm [=] ta được giá trị của a_7 là 0,20022003

Bấm [=] ta được giá trị của a_8 là 1,250343891

Bấm [=] ta được giá trị của a_9 là - 3,994505295

Suy ra (a_n) tuần hoàn với chu kì là 3

Ta có: 2003 chia 3 được dư là 2 $\Rightarrow a_{2003} = a_2 \Rightarrow a_{2003} = -3,994505295$

Vậy $a_{2003} = -3,994505295$.

BT 10. Cho dãy (u_n) được xác định như sau:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ \ u_{n+2} = \begin{cases} 2u_{n+1} - 3u_n;\ n = 2k+1 \\ 3u_{n+1} + 2u_n;\ n = 2k \end{cases}$$

Tính u_{10}, u_{15}, u_{20}.

Hướng dẫn thực hành

Lưu 2 vào X bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [)] {biến đếm}

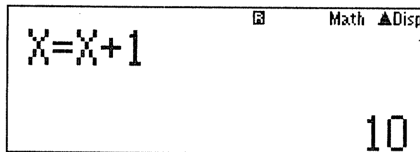
Lưu 1 vào A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Lưu 2 vào B bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [°' ' ']

Ghi vào màn hình: X=X+1:A=2B-3A:X=X+1:B=3A+2B bằng cách:

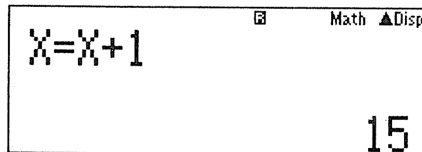
[ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [2] [ALPHA] [°' ' '] [−] [3] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [°' ' '] [ALPHA] [CALC] [3] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [ALPHA] [°' ' ']

Bấm [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi X = X + 1 = 10

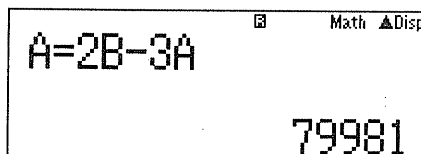


Bấm [=] ta được giá trị của u_{10} là 1667

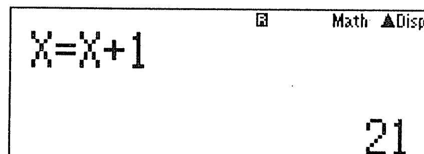
Bấm [=]...[=] cho đến khi X = X + 1 = 15



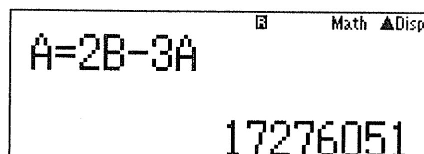
Bấm [=] ta được giá trị của u_{15} là 79981



Bấm [=]...[=] cho đến khi X = X + 1 = 21



Bấm [=] ta được giá trị của u_{21} là 17276051



Vậy u_{10}= 1667;u_{15}=79981;u_{21}= 17276051.

BT 11. Cho dãy số (u_n) thỏa $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$

a) Tính u_{25}

b) Tính $f(n) = |u_{n-4}.u_{n-2} - u_{n-2}.u_n|$ với n = 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19

Hướng dẫn thực hành

a) Quy trình bấm phím tính u_{25}

Lưu 1 vào A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Lưu 1 vào B bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [°'"]

Lưu 2 vào C bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [hyp] {biến đếm}

Ghi vào màn hình: C=C+1:A=B+A:C=C+1:B=A+B bằng cách:

[ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [°'''] [+] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [°''']

Bấm [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi C=C+1=25

```
Math ▲Disp
C=C+1
                25
```

Bấm [=] ta được giá trị của u_{25} là 75025

```
Math ▲Disp
A=B+A
             75025
```

Vậy $u_{25} = 75025$.

b) Quy trình bấm phím tính $\left|u_{n-4}.u_{n-2} - u_{n-2}.u_n\right|$

Dùng công thức truy hồi để biến đổi, ta được: $u_n = 3u_{n-3} + 2u_{n-4}$

Suy ra: $\left|u_{n-4}.u_{n-2} - u_{n-2}.u_n\right| = u_{n-2}\left(3u_{n-3} + u_{n-4}\right)$

Ta có: $u_2 = 1; u_3 = 3$

Lưu 3 vào X bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [)]

Lưu 1 vào B bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [°''']

Lưu 2 vào C bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [hyp]

Ghi vào màn hình:

X=X+1:A=C+B:A(3C+B):X=X+1:B=A+C:B(3A+C):X=X+1:C=B+A:C(3B+A)

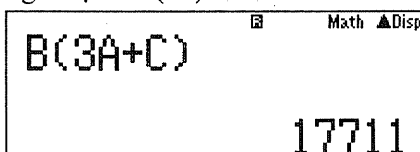
bằng cách:

[ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [(−)] [(] [3] [ALPHA] [hyp] [+] [ALPHA] [°'''] [)] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°'''] [(] [3] [ALPHA] [(−)] [+] [ALPHA] [hyp] [)] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [°'''] [+] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [hyp] [(] [3] [ALPHA] [°'''] [+] [ALPHA] [(−)] [)]

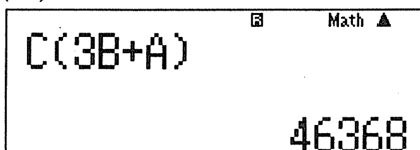
Bấm [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi X= X+1 = 11

```
Math ▲Disp
X=X+1
                11
```

Bấm [=] [=] ta được giá trị của f(13) là 17711



Tương tự, ta được: f(14) = 46368



f(15) = 121393 ; f(16) = 317811; f(17) = 832040; f(18) = 2178309;
f(19) = 5702887.

BT 12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = 3,\ u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3},\ (n \geq 4)$

Tính giá trị của u_{22} và tổng S_{22} của 22 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n)

Hướng dẫn thực hành

Đưa 1 vào ô nhớ A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Đưa 2 vào ô nhớ B bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [°''']

Đưa 3 vào ô nhớ C bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [hyp]

Đưa 3 vào ô nhớ X bằng cách: [3] [SHIFT] [RCL] [)] {biến đếm}

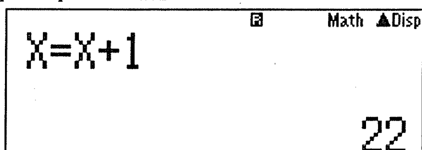
Đưa 6 vào ô nhớ D bằng cách: [6] [SHIFT] [RCL] [sin] {biến tổng}

Ghi vào màn hình:

X= X+1:A=C+2B+3A:D=D+A:X= X+1:B=A+2C+3B:D=D+B:X= X+1:C=B+2A+3C:D=D+C bằng cách:

[ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [2] [ALPHA] [°'''] [+] [3] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [ALPHA] [hyp] [+] [3] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [°'''] [+] [2] [ALPHA] [(−)] [+] [3] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [∫□] [ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [ALPHA] [hyp]

Bấm [CALC] sau đó lặp lại phím [=] cho đến khi X = X +1 =22



Bấm [=] ta có giá trị của u_{22} là 53147701

```
A=C+2B+3A
                53147701
```

Bấm [=] ta có giá trị của S_{22} là 91816783

```
D=D+A
                91816783
```

Vậy u_{22} = 53147701; S_{22} = 91816783

BT 13. Tính chính xác giá trị của biểu thức:

$$C=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{24}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{24}+\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{26}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{26}$$

Hướng dẫn thực hành

Đặt $u_n=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$

Ta chứng minh được: $\begin{cases}u_1=5;u_2=15\\ u_n=5u_{n-1}-5u_{n-2};n\geq 3\end{cases}$

Ta có: $u_{26}=5u_{25}-5u_{24}\Rightarrow C=u_{24}+u_{26}=5u_{25}-4u_{24}$

Ghi vào màn hình: C=C+1:A=5B-5A:C=C+1:B=5A-5B

Bấm [CALC], nhập giá trị 2 cho C, bấm [=], nhập giá trị 15 cho B, bấm , nhập giá trị 5 cho A, bấm [=]

Bấm [=]... [=]cho đến khi C = C + 1 = 24

```
C=C+1
                      24
```

Bấm [=] ta có giá trị của U_{24} (được lưu ở B)

```
B=5A-5B
     2.531298828x10^13
```

Bấm [=]...[=] cho đến khi C = C + 1 = 25

C=C+1

25

Bấm [=] ta có giá trị của U_{25} (được lưu ở A)

A=5B−5A

9.158325195×10^{13}

Ghi vào màn hình: $5A - 4B$. Bấm [=] ta được: $3,566643066\times10^{14}$

Ghi vào màn hình: Ans-$3,56664306\times10^{14}$

Bấm bấm [=] ta được: 640625. Suy ra C = 356664306640625

Vậy C = 356664306640625.

BT 14. Cho

$S_1 = 81, S_2 = S_1 + 225, S_3 = S_1 + S_2 + 625, S_4 = S_1 + S_2 + S_3 + 1521,$
$S_5 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + 3249;...$

Tính S_8, S_9, S_{10}.

Hướng dẫn thực hành

Công thức tổng quát của dãy này như sau:

$$\begin{cases} S_1 = 81 \\ S_n = S_1 + ... + S_{n-1} + \left(2n^2 + 7\right)^2 \end{cases}$$

Lưu 1 vào A bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Lưu 81 vào C bằng cách: [8] [1] [SHIFT] [RCL] [hyp]

Ghi vào màn hình: A=A+1:B=C+(2×A^2 +7)^2:C=C+B bằng cách:

[ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [√□] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [(] [2] [×] [ALPHA] [(−)] [x^2] [+] [7] [)] [x^2] [ALPHA] [√□] [ALPHA] [hyp] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [hyp] [+] [ALPHA] [°''']

Bấm [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi A =A+1= 8

A=A+1

8

Bấm $\boxed{=}$ ta có giá trị của S_8 là 89280

```
Math ▲Disp
B=C+(2×A²+7)²
                89280
```

Bấm $\boxed{=}$...$\boxed{=}$ cho đến khi A = A+1=9

```
Math ▲Disp
A=A+1
                    9
```

Bấm $\boxed{=}$ ta có giá trị của S_9 là 188896

```
Math ▲Disp
B=C+(2×A²+7)²
               188896
```

Bấm $\boxed{=}$...$\boxed{=}$ cho đến khi A =A+1= 10

```
Math ▲Disp
A=A+1
                   10
```

Bấm $\boxed{=}$ ta có giá trị của S_{10} là 392080

```
Math ▲Disp
B=C+(2×A²+7)²
               392080
```

Vậy $S_8 = 89280; S_9 = 188896; S_{10} = 392080$

BT 15. Cho $U_1 = 2, U_{n+1} = U_n + 2n$. Tính chính xác giá trị của U_{2015}

Hướng dẫn thực hành

Áp dụng quy luật truy hồi trên, ta được:

$U_2 = U_1 + 2\times1$

$U_3 = U_2 + 2\times2$

$U_4 = U_3 + 2\times3$

....

$U_{2014} = U_{2013} + 2\times2013$

$U_{2015} = U_{2014} + 2\times2014$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên và rút gọn, ta được:

$U_{2015} = U_1 + 2\times(1+2+3+...+2014) = 2 + 2 \times \dfrac{2014(2014+1)}{2}$

Dùng máy tính ta tính được: $U_{2015} = 4058212$.

BT 17. Cho dãy số (U_n): $U_1 = \sqrt{5}; U_2 = \sqrt{5+\sqrt{5}}; U_n = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+...+\sqrt{5}}}}$ (n dấu căn). Tính U_{2009}.

(Trích đề thi HSG MTCT Thanh Hóa, THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Lưu $\sqrt{5}$ vào ô nhớ Ans bằng cách: [5] [=]

Ghi vào màn hình: $\sqrt{5+Ans}$ bằng cách: [√■] [5] [+] [Ans]

Bấm [=]...[=] cho đến khi 2 kết quả liên tiếp bằng nhau (2,791287847) thì dừng. Đó cũng là kết quả của bài toán.

Vậy $U_{2009} = 2,791287847$.

BT 18. Cho $a_0 = 2008$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}, 0 \le n \le 1003$.

Hãy tính giá trị bé nhất của phần nguyên a_n.

Hướng dẫn thực hành

Ta có: $a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n^2}{a_n+1} = 1 - \dfrac{1}{a_n+1} > 0$

Suy ra $a_0 > a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$

Với $0 \le n \le 1003$

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + ... + (a_n - a_{n-1})$$
$$= 2008 - n + \frac{1}{a_0+1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}+1} > 2008 - n > 1005$$

Vì $a_0 > a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$ nên

$$\frac{1}{a_0+1} + ... + \frac{1}{a_{n-1}+1} < \frac{n}{a_{n-1}+1} \le \frac{1003}{a_{1002}+1} < \frac{1003}{2004-1002+1} = 1$$

Vậy giá trị phần nguyên bé nhất của a_n là 1005 đạt được khi n = 1003 **.**

BT 19. Biết $X_1 = \dfrac{1}{2}; X_2 = \dfrac{1}{5}; X_n = \dfrac{X_{n-1}.X_{n-1}}{15.X_{n-2} - 6X_{n-1}}$

Tính x_{20}

Hướng dẫn thực hành

Lưu 2 vào A bằng cách: [2] [SHIFT] [RCL] [(-)] {biến đếm}

Lưu $\frac{1}{2}$ vào X bằng cách: [1] [▭/▭] [2] [SHIFT] [RCL] [)]

Lưu $\frac{1}{5}$ vào Y bằng cách: [1] [▭/▭] [5] [SHIFT] [RCL] [S⇔D]

Ghi vào màn hình: $A = A+1 : X = \frac{XY}{15X-6Y} : A = A+1 : Y = \frac{XY}{15X-6Y}$ bằng cách:

[ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [▭/▭] [ALPHA] [)] [ALPHA] [S⇔D] [▼] [1] [5] [ALPHA] [)] [−] [6] [ALPHA] [S⇔D] [▶] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [CALC] [▭/▭] [ALPHA] [)] [ALPHA] [S⇔D] [▼] [1] [5] [ALPHA] [)] [−] [6] [ALPHA] [S⇔D]

Bấm [CALC] và lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi A = A+1=20

R Math ▲Disp

A=A+1

20

Bấm [=] ta có giá trị của x_{20} là $-1,592005155 \times 10^{-8}$

R Math ▲

$Y=\frac{XY}{15X-6Y}$

$-1.592005155\times10^{18}$

Vậy giá trị của x_{20} là $-1,592005155 \times 10^{-8}$

BT 20. Cho dãy số với $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_{n+3} = 2x_{x+2} - 3x_{n+1} + x_n$.

Viết quy trình bấm máy tính x_n để tính x_{40}, S_{40} và x_{45}, S_{45}.

Biết $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} + x_n$.

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2014-2015)

Lời giải và đáp số

Gán $1 \to A;\ 2 \to B;\ 3 \to C;\ 3 \to X;\ 6 \to Y$, Y là biến tổng

Ghi vào màn hình:

$X = X+1 : D = 2C-3B+A : Y = Y+D : X = X+1 : A = 2D-3C+B : Y = Y+A :$
$X = X+1 : B = 2A-3D+C : Y = Y+B : X = X+1 : C = 2B-3A+D : Y = Y+C$

Ấn [CALC] sau đó lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi

$X = 40;\ x_{40} = 12931327,\ Y = 20310400$

$X = 45;\ x_{45} = 134978795,\ Y = 77858002$

Chủ đề 3:
PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1. PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp và một số lưu ý khi giải dạng toán này

1. Kiến thức máy tính

- Cần nắm chức năng giải phương trình SHIFT CALC (SOLVE)
- Chức năng giải phương trình bậc hai: MODE 5 3
- Chức năng giải phương trình bậc ba: MODE 5 4
- Sử dụng được chức năng **TABLE** dò nghiệm được nghiệm phương trình.

2. Kiến thức toán

- Vẽ được đồ thị hàm số sơ cấp, dựa vào đồ thị xác định được số nghiệm phương trình. Số nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ và đồ thị $(C'): y=g(x)$.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đơn điệu trên D (hoặc luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến trên D) thì số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ không quá 1 nghiệm và $f(x)=f(y)$ khi và chỉ khi $x=y$
- Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đơn điệu trên D (hoặc luôn đồng biến, hoặc luôn nghịch biến trên D) và hàm số $y=g(x)$ là hàm hằng hoặc đơn điệu ngược với hàm $y=f(x)$ thì số nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ không quá 1 trên D.

Từ đó: *Để chứng minh phương trình $f(x) = g(x)$ (*) có nghiệm duy nhất, ta thực hiện các bước sau:*

- *Chọn được nghiệm x_0 của phương trình.*
- *Xét các hàm số $y = f(x)$ (C_1) và $y = g(x)$ (C_2). Ta cần chứng minh một hàm số đồng biến và một hàm số nghịch biến. Khi đó (C_1) và (C_2) giao nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ x_0. Đó chính là nghiệm duy nhất của phương trình (*).*

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp n trên D và phương trình $f^{(k)}(x)=0$ có m nghiệm, khi đó phương trình $f^{(k-1)}(x)$ có nhiều nhất là $m+1$ nghiệm
- Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a,b]$. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc (a,b).

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Tìm một nghiệm gần đúng của phương trình: $x^2+2\sin x-1=0$.

(Trích đề thi HSGMT Thái Nguyên năm 2003, THPT lớp 12)

Hướng dẫn thực hành

Chọn đơn vị đo góc là radian: [SHIFT] [MODE] [4]

Ghi vào màn hình: $X^2+2\sin X-1=0$ bằng cách:

[ALPHA] [)] [x^2] [+] [2] [sin] [ALPHA] [)] [)] [−] [1] [ALPHA] [CALC] [0]

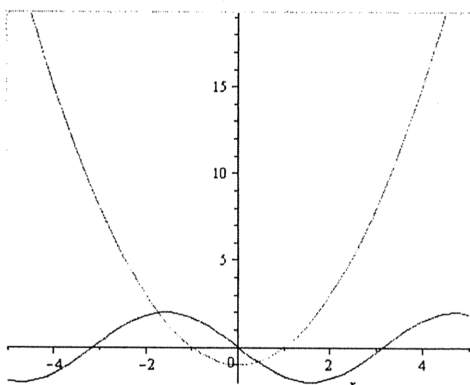
Ấn [SHIFT] [CALC] Nhập [0] [=]. Màn hình hiển thị

```
X²+2sin(X)-1=0
X=   0.4230281819
L-R=            0
```

Vậy một nghiệm gần đúng của phương trình là: $x\approx 0{,}4230281819$.

Lời bình: Đề bài yêu cầu tìm một nghiệm gần đúng của phương trình, nên ta chỉ cần chỉ ra một nghiệm như trên là đủ. Câu hỏi đặt ra là liệu phương trình trên có bao nhiêu nghiệm?

Vẽ trên một hệ trục tọa độ đồ thị của hai hàm số $y=x^2-1$ và $y=-2\sin x$



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình trên có tối đa hai nghiệm (hai giao điểm). Sử dụng chức năng [SHIFT] [CALC] ta tìm được nghiệm còn lại của phương trình là $x=-1{,}725171205$.

```
X²+2sin(X)-1=0
X=   -1.725171205
L-R=            0
```

Ví dụ 2. Tính gần đúng các nghiệm của $3^x=4x+5\cos x$

(Trích đề thi Toàn quốc lớp 12 THBT, 2005. Đề dự bị)

Hướng dẫn thực hành

Ghi vào màn hình: $3^x=4x+5\cos x$ (đơn vị đo góc là rad) bằng cách:

[3] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [▶] [ALPHA] [CALC] [4] [ALPHA] [)] [+] [5] [cos] [ALPHA] [)] [)]

Ấn [SHIFT] [CALC] nhập [−] [1] ấn [=]. Màn hình hiển thị

```
Math
3^X=4X+5cos(X)
X=     -0.78143191
L-R=             0
```

Kết quả $X \approx -0,78143191$.

Ấn [SHIFT] [CALC] nhập 1 ấn [=]. Màn hình hiển thị

```
Math
3^X=4X+5cos(X)
X=     1.659981838
L-R=             0
```

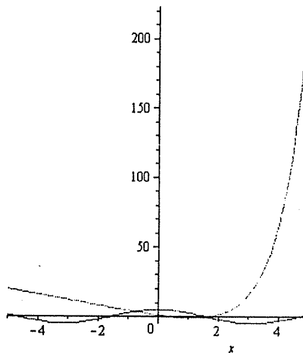
Kết quả $X \approx 1,659981838$.

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình là:

$x_1 \approx -0,78143191; x_2 \approx 1,659981838.$

Lời bình: Để khỏi sót nghiệm khi bài tập này, ta thường phát thảo qua đồ thi của hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ, từ đó ta xác định được các giao điểm và nghiệm gần đúng của nó, nên khi ta khởi tạo giá trị ban đầu cho máy giải, thì tốc độ cho nghiệm (tức kết quả) nhanh hơn.

Đồ thị hai hàm số $y = 3^x - 4x$ và $y = 5\cos x$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Ví dụ 3. Tính gần đúng tất cả các nghiệm của phương trình: $0,8^x + 4 = \sqrt{5}^x$.

Hướng dẫn thực hành

Ta có: $f(x) = 0,8^x + 4$ là hàm số nghịch biến, $g(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$ là hàm số đồng biến do đó phương trình đã cho có nhiều nhất một nghiệm.

Ghi vào màn hình: $0,8^X + 4 = \sqrt{5}^X$ bằng cách:

[0] [•] [8] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [▶] [+] [4] [ALPHA] [CALC] [$\sqrt{\blacksquare}$] [5] [▶] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)]

Ấn SHIFT CALC nhập 1 =. Màn hình hiển thị

```
0.8^X+4=√5
X=    1.910592457
L-R=            0
```

Vậy nghiệm gần đúng của phương trình là: $x \approx 1{,}910592457$.

Lưu ý: Đối với hàm số: $y = a^x$. Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến, nếu $a < 1$ thì hàm số nghịch biến. Tổng quát hơn: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a,b]$

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$, dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên $[a,b]$
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$, dấu "=" xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên $[a,b]$

Ví dụ 4. Tính gần đúng $x \in (0;1)$ của phương trình: $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$

(Trích đề thi HSGMTCT Đăk Lăk 2008-2009, Lớp 12 THPT)

Hướng dẫn thực hành

Ta nhận thấy nếu x là nghiệm của phương trình thì $-x$ cũng là nghiệm của phương trình do đó phương trình có tối đa 3 nghiệm dương nên cũng có tối đa 3 nghiệm âm.

Đặt $X = x^2$ thì phương trình đã cho trở thành: $64X^3 - 96X^2 + 36X - 3 = 0$

Dùng chương trình giải phương trình bậc ba giải phương trình trên:

Ấn MODE 5 4

Nhập các hệ số 6 4 = − 9 6 = 3 6 = − 3 = =

Ta được:

Nghiệm thứ nhất là X_1=0,9698463104, lưu nghiệm này vào ô nhớ A bằng cách: SHIFT RCL (−)

```
X1=
       0.9698463104
```

Nghiệm thứ hai của phương trình là $X_2 = 0{,}4131759112$, lưu nghiệm này vào ô nhớ B bằng cách: SHIFT RCL °'''

```
X2=
       0.4131759112
```

Nghiệm thứ ba của phương trình là $X_3 = 0,1169777784$, lưu nghiệm này vào ô nhớ C bằng cách: [SHIFT] [RCL] [hyp]

```
X3=
                0.116977784
```

Trở về tính toán cơ bản: [MODE] [1]

Ghi vào màn hình: $64X^3 - 96X^2 + 36X - 3$

Ấn [SHIFT] [CALC] nhập [ALPHA] [(−)] ấn [=]. Kết quả $X = 0,984807753$

Ấn [SHIFT] [CALC] nhập [ALPHA] [°,,,] ấn [=]. Kết quả $X = 0,3420201433$

Ấn [SHIFT] [CALC] nhập [0] [•] [6] ấn [=]. Kết quả $X = 0,6427876097$ (bước 3)

Vậy các nghiệm thuộc (0;1) của phương trình là $x_1 \approx 0,984807753$,

$x_2 \approx 0,3420201433$, $x_3 \approx 0,6427876097$.

Lời bình:

- Nếu giải bằng lệnh (SOLVE) trực tiếp cho phương trình đầu với giá trị đầu 0,3; 0,5; 0,95 ta cũng được 3 nghiệm trên
- Ở bước 3, nếu ta giải phương trình với giá trị [ALPHA] [hyp] (C) thì kết quả cho trùng nghiệm thứ 2, nên ta phải chọn giá trị khác. Việc chọn giá trị này đôi lúc còn phụ thuộc vào kinh nghiệm người sử dụng MTCT.

Ví dụ 5. Tìm một nghiệm gần đúng của phương trình :

$$5x + \sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{x^2 - 10x + 50}$$

(Trích đề thi HSGMTCT Thanh Hóa, THPT, 2006-2007)

Hướng dẫn thực hành

Ghi vào màn hình: $5X + \sqrt{X^2 - 4X + 5} = \sqrt{X^2 - 10X + 50}$ bằng cách:

[5] [ALPHA] [)] [+] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [4] [ALPHA] [)] [+] [5] [▶] [ALPHA] [CALC] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [−] [1] [0] [ALPHA] [)] [DEL] [+] [5] [0]

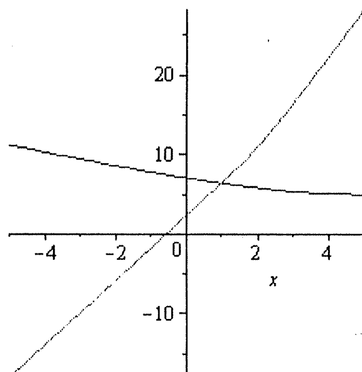
Bấm [SHIFT] [CALC], nhập giá trị ban đầu cho X (chẳng hạn [5]) bấm [=], ta được 1 nghiệm của phương trình là 0,9977448334.

```
5X+√X²−4X+5 =√X²▷
X=   0.9977448334
L−R=            0
```

Vậy $x \approx 0,997744833$ là nghiệm của phương trình.

Nhận xét: Nghiệm trên chính là nghiệm duy nhất của phương trình.

Đồ thị của hai hàm số $y = 5x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}, y = \sqrt{x^2 - 10x + 50}$



Ví dụ 6. Giải phương trình sau: $\sqrt{5x^3 - 33x^2 - 21x + 11} = 2x - 3$ (*)

(Trích đề thi HSGMTCT Kiên Giang, THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Điều kiện: $2x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{2}$.

Với điều kiện trên, phương trình (*) trở thành:

$5x^3 - 33x^2 - 21x + 11 = (2x - 3)^2 \Leftrightarrow 5x^3 - 37x^2 - 9x + 2 = 0$ (**)

Chọn chương trình giải phương trình bậc 3: [MODE] [5] [4]

Nhập các hệ số của (**):

[5] [=] [−] [3] [7] [=] [−] [9] [=] [2] [=]

Bấm [=] ta có nghiệm thứ nhất của (**) là 7,629067186

X1=
7.629067186

Bấm [=] ta có nghiệm thứ hai của (**) là 0,141491783

X2=
0.1414917838

Bấm [=] ta có nghiệm thứ ba của (**) là - 0,370558969

X3=
-0.3705589696

Vì $x \ge \frac{3}{2}$ nên nghiệm của (*) là 7,629067186.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x \approx 7,629067186$.

Lời giải và đáp số

Ta có

$$\sqrt{5x^3 - 33x^2 - 21x + 11} = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \ge 0 \\ 5x^3 - 33x^2 - 21x + 11 = (2x-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \\ 5x^3 - 37x^2 - 9x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \approx 7,629067186.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x \approx 7,629067186$.

Ví dụ 7. Giải phương trình: $x^4 + 2,2003x^3 + 1,2004x^2 - 0,2001x - 0,2002 = 0$.

(Trích đề thi HSGMTCT Đồng Nai, buổi thi thứ hai, THPT, 2002-2003)

Hướng dẫn thực hành

Nhận xét: f(-1)=1-2,2003+1,2004+0,2001-0,2002=0

Suy ra $x = -1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{x+1}$

Dùng thuật toán Horner kết hợp với máy tính ta tính được:

$g(x) = x^3 + 1,2003x^2 + 10^{-4}x - 0,2002$. Giải phương trình $g(x) = 0$

Chọn chương trình giải phương trình bậc ba: [MODE] [5] [4]

Nhập các hệ số của g(x):

[1] [=] [1] [.] [2] [0] [0] [3] [=] [1] [0] [$x^■$] [−] [4] [▶] [=] [−] [0] [.] [2] [0] [0] [2] [=]

Bấm [=] ta có nghiệm thứ nhất của g(x) là 0,3583584759

X1=
0.3583584759

Bấm [=] ta có nghiệm thứ hai của $g(x)$ là - 0,5586584759

X2=
-0.5586584759

Bấm [=] ta có nghiệm thứ ba của $g(x)$ là -1

X3= -1

Vậy $x=-1$; $x\approx 0{,}358358475$; $x\approx -0{,}558658475$ là các nghiệm của phương trình.

Lời giải và đáp số

Ta có

$$x^4+2{,}2003x^3+1{,}2004x^2-0{,}2001x-0{,}2002=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+1{,}2003x^2+10^{-4}x-0{,}2002\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ x^3+1{,}2003x^2+10^{-4}x-0{,}2002=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x\approx 0{,}358358475\\ x\approx -0{,}558658475\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1; x\approx 0{,}358358475; x\approx -0{,}558658475$

Ví dụ 8. Giải phương trình tìm x (dưới dạng phân số)

$$\frac{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\ldots\left(98^4+4\right)}{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\ldots\left(100^4+4\right)}.5101x=\frac{1}{25112007}.$$

Hướng dẫn thực hành

Cách 1: Trước tiên, ta tính giá trị của $A=\frac{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\ldots\left(98^4+4\right)}{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\ldots\left(100^4+4\right)}$

Ghi vào màn hình: $\sum_{X=0}^{24}\left(\log\left((2+4X)^4+4\right)-\log\left((4+4X)^4+4\right)\right)$ bằng cách:

SHIFT log■□ log (2 + 4 ALPHA)) x■ 4 ▶ + 4) − log (4 + 4 ALPHA)) x■ 4 ▶ + 4 ▶ 0 ▶ 2 4

Bấm = ta được giá trị - 3,707655324

Σ(log((2+4X)^4 ▸ (X=0 đến 24) -3.707655324

Ghi vào màn hình: 10^{Ans}. Bấm =, ta được giá trị $\frac{1}{5101}$

10^Ans 1/5101

Do đó: $X = \dfrac{1}{25112007}$

Vậy nghiệm của phương trình là $X = \dfrac{1}{25112007}$.

Cách 2: Trước tiên, ta tính giá trị của $A = \dfrac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)...(98^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)...(100^4+4)}$

Ghi vào màn hình: $\prod_{x=1}^{25}\left(\dfrac{(4(X-1)+2)^4+4}{(4X)^4+4}\right)$ bằng cách:

[ALPHA] [log■□] [■/□] [(] [4] [(] [ALPHA] [)] [−] [1] [)] [+] [2] [)] [x■] [4] [▶] [+] [4] [▼]
[(] [4] [ALPHA] [)] [)] [x■] [4] [▶] [+] [4] [▶] [1] [▶] [2] [5]

Ấn [=] ta được giá trị $\dfrac{1}{5101}$

Do đó: $X = \dfrac{1}{25112007}$

Vậy nghiệm của phương trình là $X = \dfrac{1}{25112007}$.

Lưu ý: Thử với máy tính ta thấy A có dạng sau: $A = \dfrac{1}{13}.\dfrac{13}{41}.\dfrac{41}{85}...\dfrac{4705}{5101} = \dfrac{1}{5101}$.

Do đó giá trị x cần tìm chính là vế phải.

Ví dụ 9. Với n là số tự nhiên, xét phương trình:

$$5(14n+3)x^2-(147n+29)x+3(21n+4)=0.$$

Giải phương trình tìm x dưới dạng phân số khi n = 2005.

Hướng dẫn thực hành

Lưu 2005 vào A bằng cách [2] [0] [0] [5] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Chọn chương trình giải phương trình bậc 2 bằng cách: [MODE] [5] [3]

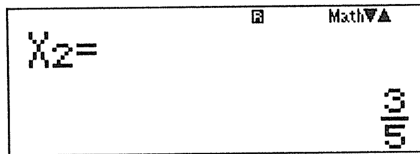
Nhập hệ số của phương trình:

[5] [(] [1] [4] [ALPHA] [(−)] [+] [3] [)] [=] [−] [(] [1] [4] [7] [ALPHA] [(−)] [+] [2] [9] [)]
[=] [3] [(] [2] [1] [ALPHA] [(−)] [+] [4] [)] [=]

Bấm [=] ta có nghiệm thứ nhất của phương trình là x_1 =1,499982189

X1= Math▼
1.499982189

Bấm ⊟ ta có nghiệm thứ hai của phương trình là $x_2 = \frac{3}{5} = 0,6$.



Theo định lí Viét, ta có: x_1x_2

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3(21n+4)}{5(14n+3)} \Rightarrow x_1 = \frac{3(21n+4)}{0,6.5(14n+3)} = \frac{21n+4}{14n+3}$$

Dùng máy tính ta tính được: $x_1 = \frac{42109}{28073}$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = \frac{42109}{28073}$, $x_2 = \frac{3}{5}$.

Lời giải và đáp số

Với $n = 2005$ thay vào phương trình ta được:

$$140365x^2 + 294764x + 126327 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{5}$$

Theo định lí Viét, ta có: x_1x_2

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3(21n+4)}{5(14n+3)} \Rightarrow x_1 = \frac{3(21n+4)}{0,6.5(14n+3)} = \frac{21n+4}{14n+3}$$

Suy ra $x_1 = \frac{21n+4}{14n+3}.\frac{1}{x_2} = \frac{42109}{28073}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = \frac{42109}{28073}$, $x_2 = \frac{3}{5}$.

Ví dụ 10. Tính gần đúng nghiệm của phương trình: $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(\sqrt{2}-1\right)^x + 3$

(Trích đề thi HSG MTCT Thanh Hóa, THPT, 2004-2005)

Hướng dẫn thực hành

Nhận thấy: $3+2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}+1\right)^2; \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$ nên phương trình đã cho tương đương với $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x} + 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{3x} - 3\left(\sqrt{2}+1\right)^x - 1 = 0$ (*)

Đặt $t = \left(\sqrt{2}+1\right)^x$, $(t > 0)$, (*) trở thành: $t^3 - 3t - 1 = 0$ (**)

Chọn chương trình giải hệ phương trình ba ẩn : MODE 5 4

Nhập hệ số của hệ: 1 = 0 = − 3 = − 1 =

Bấm = ta có nghiệm thứ nhất của (**) là 1,879385242

X1=
1.879385242

Bấm = ta có nghiệm thứ hai của (**) là - 0,347296355

X2=
-0.3472963553

Bấm = ta có nghiệm thứ nhất của (**) là - 1,532088886

X3=
-1.532088886

Vì $t > 0$ nên $t \approx 1,879385242$ suy ra $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 1,879385242$.

Dùng máy tính ta tính được: $x \approx 0,715865251$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x \approx 0,715865251$.

Lời giải và đáp số

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x} + 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{3x} - 3\left(\sqrt{2}+1\right)^x - 1 = 0$$

Đặt $t = \left(\sqrt{2}+1\right)^x, \left(t > 0\right)$. Lúc đó: (*) trở thành:

$t^3 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1,879385242 \Leftrightarrow x \approx 0,715865251$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x \approx 0,715865251$.

Ví dụ 11. Giải phương trình: $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 2x} + \frac{1}{\log_2 4x} + \frac{1}{\log_2 8x} = \frac{7600}{9009}$.

Hướng dẫn thực hành

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+3} = \frac{7600}{9009} \ (*).$$

Sử dụng chức năng SHIFT CALC ta tìm được nghiệm của phương trình (*) như sau:

$$\left[\begin{array}{l} t=3,5 \\ t=-0,474112585 \\ t=-1,591971624 \\ t=-2,692336843 \end{array}\right.$$ Từ đây ta dễ dàng suy gia các nghiệm x.

Đáp số: $x=0,154712659; x=0,331717809; x=0,719909476; x=11,3137085$.

Lời bình: Ngoài cách trên ta có thể sử dụng chức năng SHIFT CALC để tìm nghiệm phương trình, cụ thể nhập vào các giá trị ban đầu là 0,22; 0,35;07;1,5. Ta tìm được các nghiệm x tương ứng.

Ví dụ 12. Tìm tất cả các nghiệm thực gần đúng của phương trình :

$$(x-26)(x-11)(x+33)(x+78)=2010x^2$$

Hướng dẫn thực hành

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$$\left(x-\frac{858}{x}+7\right)\left(x-\frac{858}{x}+67\right)=2010.$$

Đặt $t=x-\frac{858}{x}+37$, đưa phương trình về dạng $t^2=2910 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2910}$. Từ đó ta được các phương trình $x^2+\left(37\pm\sqrt{2910}\right)x-858=0$.

Đáp số: $x_1=8,6177; x_2=-99,5621; x_3=38,9645; x_4=-22,0201$.

Lời bình: Lời giải trên có sự kết hợp biến đổi toán học đưa về phương trình bậc hai đơn giản. Tuy nhiên ta có thể sử dụng chức năng của bảng **TABLE** và phím SHIFT CALC để tìm nghiệm của phương trình. Cách này không cần đòi hỏi nhiều về toán, chỉ cần một số kỹ thuật bấm máy.

Ví dụ 12. Tìm nghiệm đúng và gần đúng của phương trình:

$$2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1}.$$

Hướng dẫn thực hành

Dùng chức năng **TABLE** dò tìm nghiệm ta thấy nghiệm của phương trình trong các khoảng $(-1;-0,5)$ và $(5,5;6)$ từ đó giải phương trình bằng SHIFT CALC ta được hai nghiệm của phương trình là $x_1=5,541381265; x_2=0,541381265$. Nghiệm đúng của phương trình trên là $x=\frac{5+\sqrt{37}}{2}, x=\frac{5-\sqrt{37}}{2}$.

Lời bình: Việc sử dụng chức năng **TABLE** nếu không khéo sẽ dẫn đến sót nghiệm. Ta có thể làm theo cách sau để hạn chế vấn đề sót nghiệm đó.

Bình phương hai vế đưa về phương trình bậc 4.

$$4x^4 - 25x^3 + 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 5x - 3\right)\left(4x^2 - 5x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5-\sqrt{37}}{2} \\ x = \dfrac{5+\sqrt{37}}{2} \end{array}\right..$$

Ví dụ 13. Giải phương trình: $x^2 - 2007\left[x\right] - 2008 = 0.$, trong đó [x] là phần nguyên của x.

Hướng dẫn thực hành

Theo lý thuyết về phần nguyên, ta có: $x - 1 \le \left[x\right] \le x$

Suy ra $x^2 - 2007x - 2008 \le x^2 - 2007\left[x\right] - 2008 \le x^2 - 2007\left(x-1\right) - 2008$

Suy ra $x^2 - 2007x - 2008 \le x^2 - 2007\left[x\right] - 2008 \le x^2 - 2007x - 1$

Do đó ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2007x - 2008 \le 0 & (1) \\ x^2 - 2007x - 1 \ge 0 & (2) \end{cases}$ (*)

Dùng chương trình giải bất phương bậc hai: MODE ▼ 1 1

Giải (1): Chọn 4.

Nhập các hệ số: 1 = − 2 0 0 7 = − 2 0 0 8 =

Ấn = ta được kết quả:

A≤X≤B

-1≤X≤2008

Do đó tập nghiệm của (1) là $T_1 = \left[-1;2008\right]$.

Giải (2): Chọn MODE ▼ 1 1 3

Nhập các hệ số: 1 = − 2 0 0 7 = − 1 =

Ấn = ta được kết quả

X≤A, B≤X

X≤-4.982559×10⁻⁴, ▶

X≤A, B≤X

◀4, 2007.000498≤X

Do đó ta được tập nghiệm của (2) là

$T_2 = \left(-\infty;-4,98255.10^{-4}\right] \cup \left[2007,000498;+\infty\right)$.

Giao hai tập nghiệm ta được tập nghiệm của (*) là:

$T = \left[-1;-4,98255.10^{-4}\right] \cup \left[2007,000498;2008\right]$.

Suy ra [x] chỉ có thể nhận các giá trị - 1; 2007 hoặc 2008.

Từ phương trình đã cho, ta được: $X = \sqrt{2008 + 2007[X]}$

Ghi vào màn hình: $\sqrt{2008 + 2007A}$

Bấm CALC, nhập giá trị - 1 cho A, bấm = ta được 1 $\Rightarrow$ nhận $x = -1$

Bấm CALC, nhập giá trị 2007 cho A, bấm = ta được 2007,500187 $\Rightarrow$ nhận $x = 2007{,}500187$

Bấm CALC, nhập giá trị 2008 cho A, bấm = ta được 2008 $\Rightarrow$ nhận x =2008

Vậy phương trình có 3 nghiệm là x = -1; x = 2007,500187 và x =2008 .

Ví dụ 14. Tìm cặp số nguyên dương x,y thỏa mãn phương trình

$$4x^3 + 17(2x - y)^2 = 161312$$

Hướng dẫn thực hành

Ta có:

$$4x^3 + 17(2x - y)^2 = 161312$$

$$4x^3 + 17(2x - y)^2 = 161312 \Leftrightarrow (2x - y)^2 = \frac{161312 - 4x^3}{17}$$

$$\Leftrightarrow 2x - y = \pm\sqrt{\frac{161312 - 4x^3}{17}} \Leftrightarrow y = 2x \pm \sqrt{\frac{161312 - 4x^3}{17}}$$

Với $161312 \geq 4x^3 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{\frac{161312}{4}} \approx 34.29 \Rightarrow x \leq 34$

Đưa $35 \to A$ bằng cách: 3 5 SHIFT RCL (−)

Ghi vào màn hình: $A = A - 1 : 2A + \sqrt{\frac{161312 - 4A^3}{17}} : 2A - \sqrt{\frac{161312 - 4A^3}{17}}$

Ấn CALC, lặp lại liên tiếp phím = cho đến khi $A - 1 = 0$, mỗi lần ấn nếu biểu thức $2A + \sqrt{\frac{161312 - 4A^3}{17}}$ hoặc $2A - \sqrt{\frac{161312 - 4A^3}{17}}$ có giá trị nguyên dương thì ghi lại kết quả.

Kết quả ta được nghiệm nguyên dương của phương trình là: (30,4), (30,116)

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. a) Tìm một nghiệm thực gần đúng của phương trình:

$$x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

b) Tìm một nghiệm âm gần đúng của phương trình: $x^8 - 7x^5 + 2x^3 - 3 = 0$.

Hướng dẫn thực hành

a) Ghi vào màn hình: $X^{13} - X^6 + 3X^4 - 3X^2 + 1 = 0$

Bấm [SHIFT] [CALC], nhập giá trị ban đầu cho X ([−] [0] [•] [5] chẳng hạn), bấm [=] ta có 1 nghiệm của phương trình là $x = -0,794424424928$.

Math ▲
X¹³−X⁶+3X⁴−3X²·▷
X= -0.794424928
L−R= 0

Vậy $x = -0,794424424928$ là 1 nghiệm của phương trình.

b) Ghi vào màn hình: $x^8 - 7x^5 + 2x^3 - 3 = 0$

Bấm [SHIFT] [CALC], nhập giá trị ban đầu cho X(chẳng hạn [−] [1]), bấm [=] ta được một nghiệm của phương trình là - 0,895105463

Math
X⁸−7X⁵+2X³−3
X= -0.895105463
L−R= 0

Vậy $x \approx$ - 0,895105463 là nghiệm âm của phương trình đã cho.

BT 2. a) Tính gần đúng các nghiệm của phương trình $2^x = 2x + 7$ (*).

b) Tính gần đúng các nghiệm của phương trình: $2^x + x^2 - 2x - 5 = 0$.

c) Tìm tất cả các nghiệm gần đúng của phương trình $2^{3x-4} + 3x^2 + \log x - 2 = 0$.

d) Tìm nghiệm gần đúng phương trình: $3^x + 5^x = 7^x\left(\log_3 x + 1\right)$.

Hướng dẫn thực hành

a) Theo hình dạng đồ thị : Phương trình (*) có nhiều nhất 2 nghiệm

Ghi vào màn hình: $2^x = 2x + 7$

Bấm [SHIFT] [CALC], nhập giá trị ban đầu cho X (chẳng hạn [−] [1]), bấm [=] ta được 1 nghiệm của (*) là - 3,454386212

Math ▲
2ˣ=2X+7
X= -3.454386212
L−R= 0

Bấm SHIFT CALC, nhập giá trị ban đầu cho X (chẳng hạn 4), bấm =
ta được 1 nghiệm của (*) là 3,884500299

Math ▲
$2^X=2X+7$
X= 3.884500299
L-R= 0

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 \approx -3,454386212;\ x_2 \approx 3,884500299$.

b) Đặt $f(x)=2^x$; $g(x)=-x^2+2x+5$

Dựa vào hình dạng đồ thị, đồ thị $y=f(x)$ cắt đồ thị $y=g(x)$ nhiều nhất tại hai điểm, suy ra phương trình $2^x+x^2-2x-5=0$ có nhiều nhất 2 điểm

Ghi vào màn hình: 2^X+X^2-2X-5

Bấm SHIFT CALC, nhập giá trị ban đầu cho X (chẳng hạn 1) bấm = ta có nghiệm phương trình là 2,193755377

Math ▲
2^X+X^2-2X-5
X= 2.193755377
L-R= 0

Bấm SHIFT CALC, nhập giá trị ban đầu cho X (chẳng hạn − 1) bấm = ta có nghiệm phương trình là - 1,369152017.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x \approx -1,369152017$ và $x \approx 2,193755377$.

c) Điều kiện: $x > 0$.

Xét hàm số $f(x)=2^{3x-4}+3x^2+\log x-2, x\in(0;+\infty)$

Ta có $f'(x)=2^{3x-4}.3\ln 2+6x+\dfrac{1}{x}>0, \forall x\in(0;+\infty)$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thuộc $(0;+\infty)$.

Đáp số: $x \approx 0,7743$.

d) Chia hai vế phương trình cho 7^x ta được: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{5}{7}\right)^x=\log_3 x+1$

Vế trái phương trình là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến.

Sử dụng chức năng SHIFT CALC tìm được $x \approx 1,0983$ là nghiệm của phương trình.

BT 3. Tìm gần đúng tất cả các nghiệm thực của phương trình: $x^2+\sin x-1=0$

(Trích đề thi HSG MTCT Nam Định, THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Phương trình đã cho $x^2-1=\sin x$

Vẽ hai đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ và $y = \sin x$ trên cùng một trục tọa độ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm. Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm.

Ghi vào màn hình: $X^2 + \sin X - 1 = 0$ (để máy ở chế độ Rad)

Bấm SHIFT CALC, nhập 1 giá trị cho X, bấm = ta được một nghiệm là 0,6367326508

```
R          Math
X²-1+sin(X)
X=   0.6367326508
L-R=            0
```

Bấm SHIFT CALC, nhập − 1 giá trị cho X, bấm = ta được một nghiệm là: − 1,409624004

```
R          Math
X²-1+sin(X)
X=   -1.409624004
L-R=            0
```

Vậy $x \approx 0{,}63673265$ và $x \approx -1{,}409624004$ là nghiệm của phương trình.

BT 4. Giải phương trình: $\left[x\right] - 2011\sqrt{x} + 2012 = 0$.

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2012)

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $x \geq 0$. Đặt $k = \left[x\right] \geq 0$. Phương trình trở thành:

$$k - 2011\sqrt{x} + 2012 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{k + 2012}{2011} > 1 \Rightarrow x = \left(\frac{k+2012}{2011}\right)^2 > 1$$

Vì $0 \leq \left[x\right] \leq x < \left[x\right] + 1 \Leftrightarrow k \leq x \leq k + 1$ nên

$$k \leq \left(\frac{k+2012}{2011}\right)^2 < k + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + \left(4024 - 2011^2\right)k + 2012^2 \geq 0 \\ k^2 + \left(4024 - 2011^2\right)k + 2012^2 - 2011^2 < 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 4040095 \leq k \leq 400096.$

- Với $k = 4040095, x = \left(\frac{4040095 + 2012}{2011}\right)^2 \approx 4040094{,}003$

  Khi đó: $\left[x\right] = 4040094 \neq 4040095 = k$ (loại)

- Với $k = 4040096, x = \left(\frac{4040096 + 2012}{2011}\right)^2 \approx 4040096{,}002$

Khi đó: $\left[x\right] = 4040096 \neq 4040096 = k$ (loại)

Vậy phương trình có một nghiệm $x \approx 4040096,002$.

BT 5. Tính gần đúng các nghiệm của phương trình:

$$2.2^{\sqrt{x^2-2x-5}+x^2} + 2012 = \frac{1}{2}.2^{\sqrt{x^2-2x-5}} + 2^{2014+x^2}$$

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $x^2 - 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1-\sqrt{6} \\ x \geq 1+\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$2^{\sqrt{x^2-2x-5}+x^2+1} + 2^{2012} = 2^{\sqrt{x^2-2x-5}-1} + 2^{2014+x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2-2x-5}-1}\left(2^{x^2+2} - 1\right) - 2^{2012}\left(2^{2+x^2} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^{2+x^2} - 1\right)\left(2^{\sqrt{x^2-2x-5}-1} - 2^{2012}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2+2} = 1 \\ \sqrt{x^2-2x-5} = 2013 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-5} = 2013$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2013^2 + 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{2013^2+6} \approx 2014,0015 \\ x = 1-\sqrt{2013^2+6} \approx -2012,0015 \end{array}\right.$$

Lời bình: Để tính $1+\sqrt{2013^2+6}$ và $1-\sqrt{2013^2+6}$ lấy 4 chữ số thập phân ta tiến hành bấm phím sau:

MODE 6 4 { chọn chế độ làm tròn 4 chữ số thập phân}

1 + √■ 2 0 1 3 x² + 6 =

```
        D   FIX   Math ▲
1+√2013²+6
              2014.0015
```

Sử dụng phím ◀ dịch chuyển đến vị trí cần chỉnh sửa, sau đó ấn DEL − = ta được kết quả là

```
        D   FIX   Math ▲
1-√2013²+6
             -2012.0015
```

BT 6. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình: $\sqrt[3]{\dfrac{x^9+9x^2-1}{3}}=2x+1$.

Lời giải và đáp số

Ta có : $\sqrt[3]{\dfrac{x^9+9x^2-1}{3}}=2x+1 \Leftrightarrow \dfrac{x^9+9x^2-1}{3}=(2x+1)^3$

$\Leftrightarrow x^9+9x^2-1=3(2x+1)^3 \Leftrightarrow x^9+9x^2-1=24x^3+36x^2+18x+3$

$\Leftrightarrow x^9+3x^3=\left(27x^3+27x^2+9x+1\right)+9x+3$

$\Leftrightarrow x^9+3x^3=(3x+1)^3+3(3x+1)$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$, $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow x^3=3x+1 \Leftrightarrow x^3-3x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 1,8794 \\ x\approx -0,3473 \\ x\approx -1,5321 \end{array}\right.$

Lưu ý: Để giải phương trình bậc ba $x^3-3x-1=0$ trên máy tính ta ấn các phím sau:

MODE 5 4 {Chọn chương trình giải phương trình bậc ba}

Nhập các hệ số: 1 = 0 = − 3 = − 1 =

Ấn = {ta được nghiệm x_1}

X1=
1.8794

Ấn = {ta được nghiệm x_2}

X2=
-0.3473

Ấn = {ta được nghiệm x_3}

X3=
-1.5321

BT 7. Giải phương trình $5^{\sin^2 x} - 5^{\cos^2 x} = 3,1432$.

Lời giải và đáp số

Phương trình đã cho tương đương với: $5^{\sin^2 x} - 5^{1-\sin^2 x} = 3,1432$ (1)

Đặt $t = 5^{\sin^2 x}$, $t > 0$. Phương trình (1) trở thành

$$t^2 - 3,1432t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3,1432 - \sqrt{(3,1432)^2 + 20}}{2} < 0 \\ t = \dfrac{3,1432 + \sqrt{(3,1432)^2 + 20}}{2} > 0 \end{array}\right.$$

Với

$$t = \frac{3,1432 + \sqrt{(3,1432)^2 + 20}}{2} = t_2 \Leftrightarrow 5^{\sin^2 x} = t_2 \Leftrightarrow \log_5(t_2) = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 - \log_5(t_2) \Leftrightarrow 2x = \arccos\left(1 - \log_5(t_2)\right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x \approx \pm 1,2608 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

BT 8. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$3^x = 7\sin x + x \text{ trên } (0; +\infty)$$

(Trích Đề thi HSG MTCT 2012 Quảng Trị)

Lời giải và đáp số

Xét hàm số $f(x) = 3^x - 7\sin x - x$, với $x \in (0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - 7\cos x$, $f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 7\sin x$

- Xét $(0; \pi)$ ta thấy $\sin x > 0 \Rightarrow y'' > 0, \forall x \in (0; \pi)$
- Xét $[\pi; +\infty)$ ta có $\begin{cases} 7\sin x \geq -7 \\ 3^x \ln^2 3 \geq 3^\pi \ln^2 x > 7 \end{cases} \Rightarrow y'' > 0, \forall x \in [\pi; +\infty)$.

Vậy $y'' > 0, \forall x \in [\pi; +\infty)$. Suy ra $y' = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0; +\infty)$

Do đó phương trình $y = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Dùng MTCT tìm được hai nghiệm của phương trình là $x \approx 0,1474; x \approx 1,9439$.

BT 9. Giải phương trình sau:

$$6^x = 4\log_6(6x + 1) + 2x + 1.$$

Hướng dẫn thực hành

Điều kiện: $x > -\dfrac{1}{6}$.

Với điều kiện trên phương trình đã cho viết thành:

$$6^x + 4x = 4\log_6(6x+1) + 6x + 1 \ (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = 6^t + 4t, t \in \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$ nên

$(*) \Leftrightarrow x = \log_6(6x+1) \Leftrightarrow 6^x - 6x - 1 = 0 \ (1)$

Xét $g(x) = 6^x - 6x - 1, g'(x) = 6^x \ln 6 - 6, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_6 \frac{6}{\ln 6}$

Vì $g'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất nên phương trình (1) có nhiều nhất hai nghiệm, tức phương trình (1) cũng không quá hai nghiệm.

Dùng MTCT ta tìm được hai nghiệm là: $x_1 = 0, x_2 \approx 1,1516$.

BT 10. Giải phương trình: $2012.2013^{2(\log_{2012} x - 1)} = x^{1 + \log_{2012} \frac{2013}{x^2}}$.

(Đề thi HSG MTCT Bộ giáo dục 2013)

Hướng dẫn thực hành

Điều kiện: $x > 0$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho trở thành

$$\log_{2012} 2012 + \log_{2012} 2013^{2(\log_{2012} x - 1)} = \log_{2012} x^{1 + \log_{2012} \frac{2013}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2(\log_{2012} x - 1)\log_{2012} 2013 = (1 + \log_{2012} 2013 - 2\log_{2012} x)\log_{2012} x$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{2012}^2 x + (\log_{2012} 2013 - 1)\log_{2012} x + 1 - 2\log_{2012} 2013 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{2012} x = 0,707136638 \\ \log_{2012} x = -0,707169299 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 216,8285075 \\ x \approx 4,610794005 \times 10^{-3} \end{array}\right.$$

Vậy $x = 216,8285; x = 0,0046$.

BT 11. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau:

$$2(3x+1)\sqrt{2x^2 - 1} = 10x^2 + 3x - 6 \ (1)$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2014-2015)

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}, x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$pt \Rightarrow 4(3x+1)^2(2x^2 - 1) = (10x^2 + 3x - 6)^2$$

$$\Leftrightarrow 28x^4 + 12x^3 - 83x^2 - 12x + 40 = 0 \ (*)$$

Xét $f(x) = 28x^4 + 12x^3 - 83x^2 - 12x + 40$

$$f'(x) = 112x^3 + 36x^2 - 166x - 12,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 1,106107225 \\ x_2 \approx -0,07142857143 \\ x_3 \approx -1,356107225 \end{cases}$$

Do đó phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm. Dùng chức năng **TABLE** và **SHIFT SOLVE** ta tìm được các nghiệm sau:

$x_1 \approx -1,724744871 \to A;\ x_1 \approx 0,724744871 \to B;$
$x_3 \approx -0,820852384;\ x_4 \approx 1,392280956.$

Nhận thấy $A + B = -1;\ A.B = -\dfrac{5}{4}$ nên x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2 + x - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 5 = 0$$

Lúc đó $(*) \Leftrightarrow (4x^2 + 4x - 5)(7x^2 - 4x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2 + 4x - 5 = 0 \\ 7x^2 - 4x - 8 = 0 \end{array}\right.$.

Giải các phương trình này ta được 4 nghiệm là

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{6}}{2} \approx -1,724744871;\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{6}}{2} \approx 0,724744871$$

$$x_3 = \frac{2 - 2\sqrt{15}}{7} \approx -0,820852384;\ x_4 = \frac{2 + 2\sqrt{15}}{7} \approx 1,392280956$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x_1 \approx 0,7247;\ x_2 \approx -0,8209;\quad x_3 \approx 1,3923.$

BT 12. Tìm cặp số nguyên dương (x, y) với x là số nguyên dương nhỏ nhất có ba chữ số và thỏa mãn phương trình: $3x^3 - 2y^2 + 4xy - 8x + 5128 = 0$.

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2014-2015)

Lời giải và đáp số

Do $x > 0, y > 0$ nên $3x^3 - 2y^2 + 4xy - 8x + 5128 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 2(y^2 - 2xy + x^2) + 2x^2 - 8x + 5128 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + 2x^2 - 8x + 5128 = 2(y - x)^2$$

$$\Leftrightarrow y = x \pm \sqrt{\frac{3x^3 + 2x^2 - 8x + 5128}{2}}$$

Xét $y = x - \sqrt{\dfrac{3x^3 + 2x^2 - 8x + 5128}{2}}$,

Vì $y > 0$ nên $\sqrt{\dfrac{3x^3 + 2x^2 - 8x + 5128}{2}} < x \Leftrightarrow 3x^3 - 8x + 5128 < 0 \Leftrightarrow x < -12$ loại trường hợp này.

Vậy ta chỉ xét $y = x + \sqrt{\dfrac{3x^3 + 2x^2 - 8x + 5128}{2}}$

Gán $99 \to X$ bằng cách [9] [9] [SHIFT] [RCL] [)]

Ghi vào màn hình: $X = X + 1 : Y = X + \sqrt{\dfrac{3X^3 + 2X^2 - 8X + 5128}{2}}$ bằng cách:

[ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [)] [+] [√] [▭/▭] [3] [ALPHA] [)] [$x^■$] [3] [▶] [+] [2] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [8] [ALPHA] [)] [+] [5] [1] [2] [8] [▼] [2]

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=] đến khi $X = 110$ thì ta được $Y = 1528$.

Vậy $x = 110, y = 1528$.

Dạng 2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp: Thông thường để giải một hệ phương trình ta sẽ sử dụng một trong các phương pháp sau:

- Phương pháp rút thế
- Phương pháp cộng đại số
- Phương pháp hàm số (xét hàm đặc trưng)
- Phương pháp đánh giá
- ....

Trong mục này, nội dung từng phương pháp được thể hiện qua các bài toán và sẽ được nói rõ qua phần bình luận.

Một số yêu cầu khi sử dụng máy

1. Cần phải biết cách lưu nghiệm trực tiếp trong mỗi trường **EQN** (Dòng máy tính mới 570VN PLUS) và cách gọi lại nghiệm đã lưu

Ví dụ: Lưu nghiệm trực tiếp trên máy khi giải phương trình: $x^2 + 5x - 7 = 0$

Bước 1: Vào môi trường giải phương trình bậc hai: [MODE] [5] [3]

Bước 2: Nhập các hệ số [1] [=] [5] [=] [−] [7]. Ấn tiếp phím [=] ta được nghiệm thứ nhất của phương trình là $x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{53}}{2}$ và lưu nghiệm này trực tiếp vào biến nhớ A bằng cách: [SHIFT] [RCL] [(−)]

Math▼

X1=

$\frac{-5+\sqrt{53}}{2}$

Ấn tiếp phím [=] ta được nghiệm thứ hai $x_1 = \frac{-5-\sqrt{53}}{2}$ và lưu nghiệm này vào biến nhớ B bằng cách: [SHIFT] [RCL] [°'"]

Math▼▲

X2=

$\frac{-5-\sqrt{53}}{2}$

Để gọi lại biến nhớ A ta ấn: [ALPHA] [(−)] (A) [=] màn hình hiển thị

Math ▲

A

$\frac{-5+\sqrt{53}}{2}$

Để gọi lại biến nhớ B ta ấn: [ALPHA] [°'"] (B) [=] màn hình hiển thị

Math ▲

B

$-\frac{5+\sqrt{53}}{2}$

2. Biết cách nhập vào màn hình một hàm số (Từ những hàm cơ bản đến những hàm phức tạp) và sử dụng [CALC]: chức năng tính giá trị của hàm số tại một điểm.

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x) = 3\sqrt{3x^2 + 5x + 6} - \sqrt[3]{x}$ tại $x = \sqrt{10}$

Bước 1: Nhập vào màn hình hàm số $3\sqrt{3X^2 + 5X + 6} - \sqrt[3]{X}$ bằng cách:

[3] [√■] [3] [ALPHA] [)] [x²] [+] [5] [ALPHA] [)] [+] [6] [▶] [−] [SHIFT] [√■] [ALPHA] [)]

Bước 2: Ấn [CALC]. Màn hình hiển thị {yêu cầu nhập giá trị của X}

Math

X?

-1.725171205

Nhập [√■] [1] [0], ấn [=]. Ta được kết quả $f(10) = 20,12623914$

Math ▲

$3\sqrt{3X^2+5X+6}-\sqrt[3]{X}$

20.12623914

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị x,y thỏa $\begin{cases} x^2 = \sqrt{2008}y - 2007 & (1) \\ y^2 = \sqrt{2008}x - 2007 & (2) \end{cases}$

(Trích đề thi HSG MTCT Long An 2008 - Lớp 10)

Hướng dẫn thực hành

Điều kiện: $\begin{cases} \sqrt{2008}y - 2007 \ge 0 \\ \sqrt{2008}x - 2007 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2007}{\sqrt{2008}} \approx 0,999750965 \\ y \ge \dfrac{2007}{\sqrt{2008}} \approx 0,999750965 \end{cases}$

Lấy (1)-(2) vế theo vế ta được:

$$x^2 - y^2 = \sqrt{2008}(y - x) \Leftrightarrow (x - y)\left(x + y + \sqrt{2008}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Thay $x = y$ vào (1) ta được:

$$x^2 = \sqrt{2008}x - \sqrt{2007} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2008}x + \sqrt{2007} = 0$$

Chọn chương trình giải phương trình bậc hai: MODE 5 3

Nhập các hệ số: 1 = − √■ 2 0 0 8 = √■ 2 0 0 7 =

Ấn =. Ta được nghiệm thứ nhất $x_1 \approx 43,78760256 \Rightarrow y_1 \approx 43,78760256$

X1=
43.78760256

Ấn = ta được nghiệm thứ hai là $x_2 \approx 1,023110446 \Rightarrow y_2 \approx 1,023110446$

X2=
1.023110446

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\begin{cases} x_1 \approx 43,78760256 \\ y_1 \approx 43,78760256 \end{cases}; \begin{cases} x_2 \approx 1,023110446 \\ y_2 \approx 1,023110446 \end{cases}$

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $\begin{cases} \sqrt{2008}y - 2007 \ge 0 \\ \sqrt{2008}x - 2007 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2007}{\sqrt{2008}} \approx 0,999750965 \\ y \ge \dfrac{2007}{\sqrt{2008}} \approx 0,999750965 \end{cases}$

Lấy (1)-(2) vế theo vế ta được:

$x^2 - y^2 = \sqrt{2008}(y - x) \Leftrightarrow (x - y)\left(x + y + \sqrt{2008}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Thay $x = y$ vào (1) ta được:

$x^2 = \sqrt{2008}x - \sqrt{2007} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2008}x + \sqrt{2007} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \approx 43,78760256 \\ x_2 \approx 1,023110446 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm: $\begin{cases} x_1 \approx 43,78760256 \\ y_1 \approx 43,78760256 \end{cases}; \begin{cases} x_2 \approx 1,023110446 \\ y_2 \approx 1,023110446 \end{cases}$

Lời bình:

- Có thể thế $y = \sqrt{\sqrt{2008}x - 2007}$ vào (1) để có f(x)=0 và dùng lệnh **SOLVE** để giải ra nghiệm x_1,x_2 và tính y theo x).
- Hệ trên là hệ đối xứng loại II, thông thường ta lấy phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ hai để làm xuất hiện nhân tử chung $(x - y)$.

Ví dụ 2. Tính gần đúng nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 1 \\ xy + x + y = 3 \end{cases}$

(Trích đề thi Toàn quốc năm 2008 - Lớp 12 - THPT)

Hướng dẫn thực hành

Cách 1:

Ta có: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 1 \\ xy + x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y + xy^2 = 1 \; (*) \\ y = \dfrac{3 - x}{x + 1} \quad (**) \end{cases}$

Thế (**) vào (*) ta được: $x^2\left(\dfrac{3 - x}{x + 1}\right) + x\left(\dfrac{3 - x}{x + 1}\right)^2 = 1$

Nhập vào màn hình: $X^2\left(\dfrac{3 - X}{X + 1}\right) + X\left(\dfrac{3 - X}{X + 1}\right)^2 = 1$ bằng cách

ALPHA) x² (▭/▭ 3 − ALPHA) ▼ ALPHA) + 1 ▶) + ALPHA) (▭/▭ 3 − ALPHA) ▼ ALPHA) + 1 ▶) x² ALPHA CALC 1

Ấn SHIFT CALC nhập 0 ấn =.

Kết quả X=0,1550848125 $\Rightarrow x_1 \approx 0,1550848125$

Ấn SHIFT CALC nhập 1 0 ấn =.

Kết quả X=2,462949176 $\Rightarrow x_2 \approx 2,462949176$

Sử dụng chức năng CALC tính giá trị $y = \dfrac{3 - x}{x + 1}$ tại các giá trị x_1, x_2

- Với $x_1 \approx 0,1550848125$ thay vào (**) ta được $y_1 \approx 2,462949176$

- Với $x_2 \approx 2{,}462949176$ thay vào (**) ta được $y_2 \approx 0{,}1550848125$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x_1 \approx 0{,}1550848125 \\ y_1 \approx 2{,}4692949176 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2 \approx 2{,}4692949176 \\ y_2 \approx 0{,}1550848125 \end{cases}.$$

Lời giải và đáp số

Ta có: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 1 \\ xy + x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y + xy^2 = 1 \ (*) \\ y = \dfrac{3-x}{x+1} \quad (**) \end{cases}$

Thế (**) vào (*) ta được: $x^2\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right) + x\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \approx 0{,}1550848125 \\ x_2 \approx 2{,}462949176 \end{array}\right.$

- Với $x_1 \approx 0{,}1550848125$ thay vào (**) ta được $y_1 \approx 2{,}462949176$
- Với $x_2 \approx 2{,}462949176$ thay vào (**) ta được $y_2 \approx 0{,}1550848125$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x_1 \approx 0{,}1550848125 \\ y_1 \approx 2{,}4692949176 \end{cases};\quad \begin{cases} x_2 \approx 2{,}4692949176 \\ y_2 \approx 0{,}1550848125 \end{cases}.$$

Cách 2:

Ta có: $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 1 \\ xy + x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+y) = 1 \\ xy + x + y = 3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}, \left(S^2 - 4P \geq 0\right)$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} S.P = 1 \\ S + P = 3 \end{cases}$. Lúc đó S, P là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 1 = 0$ (1).

Sử dụng chương trình giải phương bậc hai: [CALC] [MODE] [5] [3]

Nhập các hệ số: [1] [=] [−] [3] [=] [1] [=]

Ấn [=] ta được nghiệm thứ nhất $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ và lưu nghiệm này vào biến nhớ A bằng cách: [SHIFT] [RCL] (STO) [(−)] A

X1=

$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Ấn [=] ta được nghiệm thứ nhất $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ và lưu nghiệm này vào ô nhớ B bằng cách: [SHIFT] [RCL] (STO) [°'''] B

X2=
$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Từ đó $\begin{cases} S = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ P = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} S = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ P = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (II)

Dùng MTCT kiểm tra điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$ (tức $A^2 - 4B$) ta thấy chỉ nhận (I), còn (II) loại.

A²-4B
5.326237921

Với $S = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $P = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ thì x,y sẽ là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$. Tương tự dùng MTCT ta giải được $x_1 \approx 2,462949176$

X1=
2.462949176

và nghiệm $x_2 \approx 0,1550848125$.

X2=
0.1550848125

Vậy nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x_1 \approx 0,1550848125 \\ y_1 \approx 2,4692949176 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 \approx 2,4692949176 \\ y_2 \approx 0,1550848125 \end{cases}$$

Lời bình:

- Đối với cách giải 1, ta đã sử dụng phương pháp rút thế. Ta để ý thêm rằng, phương trình ban đầu đối xứng theo x, y

nên $y_1 = x_2 = 2,462949176$; $y_2 = x_1 = 0,1550848125$.

Nhận xét ra đặc điểm trên sẽ giúp ta tiết kiệm được thời gian vì không cần phải thế các giá trị của x vào y.

- Cách giải 2 giải nhanh hơn vì nhận ra được đây là hệ đối xứng loại 1.

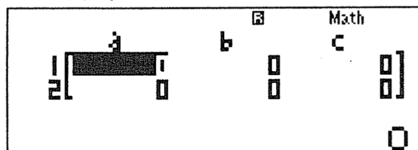
Ví dụ 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 x + 4.3^y = 6 \\ 7.\log_2 x + 5.3^y = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn thực hành

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $\begin{cases} X = \log_2 x \\ Y = 3^y \end{cases}$.

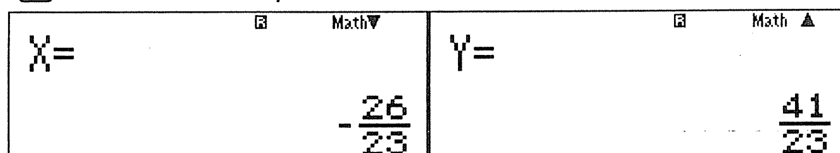
Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} X + 4Y = 6 \\ 7X + 5Y = 1 \end{cases}$

Vào chương trình giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn: MODE 5 1



Nhập các hệ số: 1 = 4 = 6 = 7 = 5 = 1 =

Ấn =. Màn hình hiển thị:



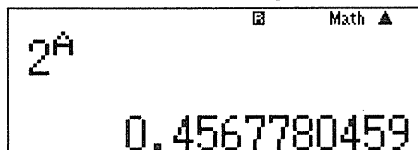
Kết quả:

$X = -\frac{26}{23}$ lưu nghiệm này vào ô nhớ A bằng cách SHIFT RCL (−)

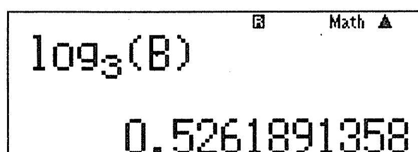
$Y = \frac{41}{23}$ lưu nghiệm này vào ô nhớ B bằng cách SHIFT RCL °'''

Đưa về chế độ tính toán thông thường: MODE 1

Nhập 2 $x^{\blacksquare}$ ALPHA (−) , ấn = ta được kết quả: $x \approx 0,4567780459$.



Nhập $\log_{\blacksquare}\square$ 3 ▶ ALPHA °''' , ấn = ta được kết quả: $y \approx 0,5261891358$



Vậy $x \approx 0,4567780459$, $y \approx 0,5261891358$.

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $\begin{cases} X = \log_2 x \\ Y = 3^y \end{cases}$.

Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} X + 4Y = 6 \\ 7X + 5Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -\dfrac{26}{23} \\ Y = \dfrac{41}{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -\dfrac{26}{23} \\ 3^y = \dfrac{41}{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 0,4567780459 \\ y \approx 0,5261891358 \end{cases}$$

Vậy nghiệm cảu hệ phương trình là $\begin{cases} x \approx 0,4567780459 \\ y \approx 0,5261891358 \end{cases}$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình: (x, y, z dương):

$$\begin{cases} x(y - z) = -1 \\ y(z + x) = 8 \\ z(x - y) = -3 \end{cases}$$

Hướng dẫn thực hành

Ta có: $\begin{cases} x(y - z) = -1 \\ y(z + x) = 8 \\ z(x - y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - xz = -1 \\ yz + yz = 8 \\ zx - zy = -3 \end{cases}$

Đặt $a = xy$, $b = yz$, $c = zx$ ta được hệ: $\begin{cases} a - c = -1 \\ b + a = 8 \\ c - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = -1 \\ a + b = 8 \\ b - c = 3 \end{cases}$ (*)

Dùng chương trình giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn: [MODE] [5] [2]

Nhập các hệ số:

[1] [=] [0] [=] [−] [1] [=] [−] [1] [=] [1] [=] [1] [=] [0] [=] [8] [=] [0] [=] [1] [=] [−] [1] [=] [3] [=]

Ấn [=] ta được nghiệm $a = 2$

X=	Math▼
	2

Ấn [=] ta được nghiệm $b = 6$

Y=	Math▼▲
	6

Ấn [=] ta được nghiệm $c = 3$

Z=

3

Tóm lại ta được: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2\ (1) \\ yz = 6\ (2) \\ zy = 3\ \ (3) \end{cases}$

Nhân vế theo vế (1), (2), (3), ta được: $(xyx)^2 = 36 \Leftrightarrow xyz = 6\,(4)$

Lần lượt chia (4) cho (2), (3), (1), ta được: $x = 1;\ y = 2;\ z = 3$

Vậy nghiệm (x; y; z) của hệ là (1; 2; 3).

Lời giải và đáp số

Ta có: $\begin{cases} x(y - z) = -1 \\ y(z + x) = 8 \\ z(x - y) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - xz = -1 \\ yz + yz = 8 \\ zx - zy = -3 \end{cases}$

Đặt $a = xy,\ b = yz,\ c = zx$ ta được hệ: $\begin{cases} a - c = -1 \\ b + a = 8 \\ c - b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = -1 \\ a + b = 8 \\ b - c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2\ (1) \\ yz = 6\ (2) \\ zy = 3\ \ (3) \end{cases}$

Nhân vế theo vế (1), (2), (3), ta được: $(xyx)^2 = 36 \Leftrightarrow xyz = 6\,(4)$

Lần lượt chia (4) cho (2), (3), (1), ta được: $x = 1;\ y = 2;\ z = 3$

Vậy nghiệm (x; y; z) của hệ là (1; 2; 3).

Ví dụ 6. Tìm nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2.3^{x+1} + 2\log_5 y^3 - 8\cos^2 z = 3 \\ 9.3^{x-1} + 9\log_5 \sqrt[3]{y} + 18\cos^2 z = 7 \\ 8.3^x - 24\log_5 y + 4\cos^2 z = -3 \end{cases}$.

(Trích Đề thi HSG MTCT, Bộ 2013)

Hướng dẫn thực hành

Đặt $X = 3^x, Y = \log_5 y, Z = \cos^2 z$. Điều kiện: $X > 0, 0 \le Z \le 1$.

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 6X + 6Y - 8Z = 3 \\ 3X + 3Y + 18Z = 7 \\ 8X - 24Y + 4Z = -3 \end{cases}$

Sử dụng chức năng giải hệ phương trình ba ẩn: [MODE] [5] [2]

Nhập các hệ số:

[6] [=] [6] [=] [−] [8] [=] [3] [=] [3] [=] [3] [=] [1] [8] [=] [7] [=] [8] [=] [−] [2] [4] [=] [4] [=] [−] [3] [=]

Ấn [=] ta được $X = \frac{1}{2}$

X=
$\frac{1}{2}$

Ấn [=] ta được $Y = \frac{1}{3}$

Y=
$\frac{1}{3}$

Ấn [=] ta được $Z = \frac{1}{4}$

Z=
$\frac{1}{4}$

Từ đó, ta dễ dàng tìm được các giá trị x, y, z

Lời giải và đáp số

Đặt $X = 3^x, Y = \log_5 y, Z = \cos^2 z$. Điều kiện: $X > 0, 0 \le Z \le 1$.

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 6X + 6Y - 8Z = 3 \\ 3X + 3Y + 18Z = 7 \\ 8X - 24Y + 4Z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{1}{3} \\ Z = \frac{1}{4} \end{cases}$

Từ đó ta suy ra $\begin{cases} x = -\log_3 2 \\ y = \sqrt[3]{5} \\ z = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,630929753 \\ y = 1,709975947 \\ z = 1,047197551 + k.3,131592654 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{5}x + \log_2 y + 3z = 4 \\ 2x + \log_3 y + 4z = 5 \\ 3x + \log_4 y + 5z = 6 \end{cases}$.

Hướng dẫn thực hành

Ta có: $\log_3 y = \log_3 2.\log_2 y; \log_4 y = \log_4 2.\log_2 y$.

Tính $\log_3 2$ lưu vào ô nhớ A bằng cách: [log■□] [3] [▶] [2] [SHIFT] [RCL] [(−)]

```
log3(2)→A
                0.6309297536
```

Tính $\log_4 2$ lưu vào ô nhớ B bằng cách: [log■□] [4] [▶] [2] [SHIFT] [RCL] [°'"]

```
log4(2)→B
                         1/2
```

Hệ đã cho viết thành: $\begin{cases} \sqrt{5}x + \log_2 y + 3z = 4 \\ 2x + \log_3 y + 4z = 5 \\ 3x + \log_4 y + 5z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5}x + \log_2 y + 3z = 4 \\ 2x + \log_3 2.\log_2 y + 4z = 5 \\ 3x + \log_4 2.\log_2 y + 5z = 6 \end{cases}$

Sử dụng chương trình giải hệ phương trình ba ẩn: [MODE] [5] [2]

Nhập cá hệ số:

[√■] [5] [=] [1] [=] [3] [=] [4] [=] [2] [=] [ALPHA] [(−)] [=] [4] [=] [5] [=] [3] [=] [ALPHA] [°'"] [=] [5] [=] [6] [=]

Ấn [=] ta được nghiệm $X = -0,1251062901$

```
X=
               -0.1251062901
```

Ấn [=] ta được nghiệm $Y = 0,649364067$

```
Y=
                 0.649364067
```

Ấn [=] ta được nghiệm $Z=1,210127367$

Z=
1.210127367

Tức

$$\begin{cases}x=-0,1251062901\\ \log_2 y=0,649364067\\ z=1,210127367\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-0,1251062901\\ y=1,568476666\\ z=1,210127367\end{cases}$$

Lưu ý: Trong môi trường **EQN,** ta không thể nhập trực tiếp được $\log_2 3$ vào máy nên ta lưu $\log_2 3\to A$, sau đó gọi biến nhớ A này trong khi nhập các hệ số của hệ phương trình. Tuy nhiên ta có thể áp dụng công thức

$$\log_a b=\ln b\div\ln a=\log b\div\ln a.$$

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $y>0$.

Hệ phương trình đã cho viết thành

$$\begin{cases}\sqrt{5}x+\log_2 y+3z=4\\ 2x+\log_3 y+4z=5\\ 3x+\log_4 y+5z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5}x+\log_2 y+3z=4\\ 2x+\log_3 2.\log_2 y+4z=5\\ 3x+\log_4 2.\log_2 y+5z=6\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-0,1251062901\\ \log_2 y=0,649364067\\ z=1,210127367\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-0,1251062901\\ y=1,568476666\\ z=1,210127367\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases}x=-0,1251062901\\ y=1,568476666\\ z=1,210127367\end{cases}$.

Ví dụ 8. Tìm **hai nghiệm đúng** của phương trình

$$\begin{cases}2012x^3+2013x=2012y^3+2013y & (1)\\ x^2y-3x+1=\sqrt{8-3xy} & (2)\end{cases}$$

(Đề thi HSG MTCT Quảng Trị 2013)

Hướng dẫn thực hành

Xét hàm số $f(t)=2012t^3+2013t$ hàm này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó:

$(1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thay vào phương trình (2) ta được

$x^3 - 3x + 1 = \sqrt{8 - 3x^2}$ (*).

Điều kiện: $\frac{-2\sqrt{6}}{3} \le x \le \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Sử dụng chức năng [SHIFT] [CALC] (SOLVE) để giải phương trình (*) như sau:

Nhập vào màn hình: $X^3 - 3X + 1 = \sqrt{8 - 3X^2}$ bằng cách:

[ALPHA] [)] [$x^■$] [3] [▶] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [1] [ALPHA] [CALC] [$\sqrt{■}$] [8] [−] [3] [ALPHA] [)] [x^2]

Ấn [SHIFT] [CALC] nhập [−] [1] [=] ta được $x_1 \approx -0,6180339887$ và lưu nghiệm này vào biến nhớ A bằng cách [SHIFT] [RCL] [(−)]

```
X³-3X+1=√8-3X²
X=   -0.618033988
L-R=            0
```

Ấn [SHIFT] [CALC] nhập [1] [=] ta được $x_2 \approx 1,618033989$ và lưu nghiệm này vào biến nhớ B bằng cách [SHIFT] [RCL] [°'"]

```
X³-3X+1=√8-3X²
X=    1.618033989
L-R=    -1.42×10⁻¹³
```

Nhận thấy $\begin{cases} A + B = 1 \\ A.B = -1 \end{cases}$. Do đó A,B là hai nghiệm của phương trình

$$X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ X = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Lưu ý: Sau khi lưu nghiệm thứ nhất $x_1 \approx -0,6180339887$ vào biến nhớ A thì ta phải nhập lại phương trình ban đầu rồi sử dụng chức năng [SHIFT] [CALC] để giải và tìm nghiệm $x_2 \approx 1,618033989$

Lời giải và đáp số

Xét hàm số $f(t) = 2012t^3 + 2013t, f'(t) = 3.2012t^2 + 2013 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ hàm này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó:

$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ thay vào phương trình (2) ta được

$x^3 - 3x + 1 = \sqrt{8 - 3x^2}$ (*).

Điều kiện: $\frac{-2\sqrt{6}}{3} \le x \le \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Với điều kiện trên phương trình (*) trở thành $\left(x^2 - x + 1\right)g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

với $g(x)$ vô nghiệm trên $\left[-\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 9. Giải phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3y^2 + 6xy = 9 \ (1) \\ \sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 + 9} \ (2) \end{cases}$$

Phân tích và tìm lời giải: Ở hệ trên ta thấy phương trình thứ nhất tuy đơn giản nhưng ta khó tìm được mối liên hệ giữa các đại lượng x, y. Ở phương trình thứ hai nhìn có vẻ phức tạp nhưng nếu ta quan sát kỹ hơn nữa thì các biểu thức trong căn đều có thể đưa về $\sqrt{a^2 + b^2}$. Nếu ta xét một vectơ $\vec{u} = (a, b)$ thì $\sqrt{a^2 + b^2} = |\vec{u}|$

Ta có $(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 4} + \sqrt{(y-1)^2 + 1} = \sqrt{(x+y)^2 + 9}$

Xét $\vec{u} = (x+1, 2); \vec{v} = (y-1, 1) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (x+y, +3)$.

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow |\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}|$. Mà ta luôn có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng nên ta có:

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x = 2y - 3$ thay vào phương trình (1) giải phương trình bậc ba.

Lời giải và đáp số

Ta có $(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 4} + \sqrt{(y-1)^2 + 1} = \sqrt{(x+y)^2 + 9}$

Xét $\vec{u} = (x+1, 2); \vec{v} = (y-1, 1) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (x+y, +3)$.

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow |\vec{u}| + |\vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}|$. Mà ta luôn có: $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng nên ta có:

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow x = 2y - 3$ thay vào phương trình (1) ta được:

$8y^3 - 33y^2 + 36y - 36 = 0$.

Dùng MTCT giải phương trình bậc ba ta được $y \approx 3,149932062$. Suy ra được $x \approx 3,299864124$.

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x \approx 3,299864124 \\ y \approx 3,149932062 \end{cases}$.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT1. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 4\log x - 5\pi^y = \ln 3 \\ 5\log x + 6\pi^y = e \end{cases}$; b) $\begin{cases} \log_5(x+y) + \log_{\sqrt{17}}(x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = \sqrt{17} \end{cases}$

Lời giải và đáp số

a) Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $\begin{cases} a = \log x \\ b = \pi^y, b > 0 \end{cases}$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} 4a - 5b = \ln 3 \\ 5a + 6b = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4118996505 \\ b = 0,1097972627 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = 0,4118996505 \\ \pi^y = 0,1097972627 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 10^a = 2,581663594 \\ y = -1,929817425 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 2,581663594 \\ y = -1,929817425 \end{cases}$

b) Từ phương trình thứ (2) ta được $x - y = \frac{\sqrt{17}}{x+y}$ thay vào phương trình (1) ta được $\log_5(x+y) = \log_{\sqrt{17}}(x+y)$ từ đây suy ra được $x + y = 1$ (3). Giải (3) và (2) ta được nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = 2,5616 \\ y = -1,5616 \end{cases}$.

BT 2. Tìm gần đúng nghiệm của hệ phương trình

a) $\begin{cases} 3^x + 4^y = 5 \\ 9^x + 16^y = 19 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2\left(\log_4 x + \log_{\sqrt{3}} x\right) = 17 \\ \log_4 x . \log_{\sqrt{3}} x = 4 \end{cases}$

Lời giải và đáp số

a) Đặt $\begin{cases} u = 3^x, u > 0 \\ v = 4^y, v > 0 \end{cases}$. Lúc đó hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 3 \end{cases}$.

Từ đây ta tìm được u, v từ đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x = 1,3283 \\ y = -0,2602 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -0,3283 \\ y = 1,0526 \end{cases}$.

b) Điều kiện: $x > 0$. Đặt $\begin{cases} u = \log_4 x \\ v = \log_{\sqrt{3}} x \end{cases}$. Lúc đó hệ đã cho trở thành:

$\begin{cases} 2(u + v) = 17 \\ u.v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \dfrac{17}{2} \\ uv = 4 \end{cases}$ suy ra u, v là nghiệm của phương trình:

$t^2 - \dfrac{17}{2}t + 4 = 0$ (*). Dùng máy tính giải (*), ta được: $t_1 = 8; t_2 = 0,5$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 8 \\ v = 0,5 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0,5 \\ v = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_4 x = 8 \\ \log_{\sqrt{3}} y = 0,5 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_4 x = 0.5 \\ \log_{\sqrt{3}} y = 8 \end{cases} \end{array}\right.$

Dùng máy tính ta tính được: x=65536 ; y=1,316074013 hoặc x=2 ; y=81

BT 3. Tìm gần đúng nghiệm của hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + \log_2 y = y\log_2 3 + \log_2 x \\ x\log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log^2 x = \log^2 y + \log^2\left(\dfrac{x}{y}\right) & (1) \\ 4x^3 + x^2 - 12x + 6 = 100^{\log y} + 10^{\log y} & (2) \end{cases}$

Lời giải và đáp số

a) Áp dụng công thức đổi sang cơ số 10 của logarit, ta có: $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

Hệ phương trình đã cho trở thành

$\begin{cases} x + \log_2 y = y\log_2 3 + \log_2 x \\ x(3 + 2\log_2 3) + \log_2 x = 2y + \log_2 y \end{cases} \Rightarrow y = 2x$

Đáp số: $\begin{cases} x = 0,4608 \\ y = 0,9217 \end{cases}$.

b) Đặt $\begin{cases} u = \log x, x > 0 \\ v = \log y, y > 0 \end{cases}$. Lúc đó phương trình thứ nhất trở thành

$$u^2 = v^2 + (u-v)^2 \Leftrightarrow 2v^2 - 2uv = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 0 \\ v = u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = 0 \\ \log x = \log y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = y \end{array}\right.$$

Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} 4x^3 + x^2 - 12x + 4 = 0 \\ 4x^3 - 13x + 6 = 0 \end{cases}$

Đáp số: Nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = 1{,}390388203 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 0{,}359611796 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 0{,}5 \\ y = 0{,}5 \end{cases}, \begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 1{,}5 \end{cases}.$$

BT 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 1 + \sqrt{2}\log_4 y \\ y^2 = 2^x y + 2^{2x+1} \end{cases}$

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $y > 0$. Từ phương trình thứ hai ta suy ra $y = 2^{x+1}$ thay vào phương trình thứ nhất ta được: $x^2 = 1 + \sqrt{2}\log_4 2^{x+1} \Leftrightarrow x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1{,}707106781 \\ y = 6{,}530107677 \end{cases}.$

BT 5. Tìm gần đúng nghiệm của hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 4^x + 9^y = 25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy(x-2)(y-2) = 4 \\ x^2 + y^2 - 2(x+y) = 4 \end{cases}$

Lời giải và đáp số

a) Đặt $\begin{cases} u = 2^x, u > 0 \\ v = 3^x, v > 0 \end{cases}$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v = 7 \\ u^2 + v^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 3 \\ v = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 5 \\ v = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \approx 1{,}5850 \\ y \approx 1{,}2619 \end{cases} \end{array}\right.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x(x-2) \\ v = y(y-2) \end{cases}$.

Hệ đã cho có 4 nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 \approx 2{,}7321 \\ y_1 \approx 2{,}7321 \end{cases}; \begin{cases} x_2 \approx 2{,}7321 \\ y_2 \approx -0{,}7321 \end{cases}; \begin{cases} x_3 \approx -0{,}7321 \\ y_3 \approx 2{,}7321 \end{cases}; \begin{cases} x_2 \approx -0{,}7321 \\ y_2 \approx -0{,}7321 \end{cases}$$

BT 4. Tìm nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + \log_2 y + \log_z 3 = 4 \\ 2x + \log_3 y + \log_z 4 = 5 \\ 3x + \log_4 y + \log_z 5 = 6 \end{cases}$.

(Trích Đề thi HSG MTCT 12, An Giang 2012)

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $y > 0, 0 < z \neq 1$. Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x + \log_2 y + \log_z 3 = 4 \\ 2x + \log_3 2.\log_2 y + \log_3 4.\log_z 3 = 5 \\ 3x + \log_4 2.\log_2 y + \log_3 5.\log_z 3 = 6 \end{cases}$$

Dùng MTCT sử dụng chức năng giải hệ phương trình ta tìm được:

$x = 0,5236897862, \log_2 y = 0,6878652703, \log_z 3 = 2,788444943$.

Từ đó ta suy ra $x = 0,5236897862, y = 1,610898137, z = 1,482881926$.

BT 5. Tìm nghiệm gần đúng của hệ:

a) $$\begin{cases} 3x^2 + 2.3^y - 5.\log_5 z = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}.3^y + \frac{2}{3}\log_5 z = 3\frac{2}{5} \\ 3,21x^2 - 3,32.3^y - 2,13\log_5 z = 3,253 \end{cases}$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Bộ 2012).

Lời giải và đáp số

Dùng chương trình giải hệ ba phương trình ta được:

$$\begin{cases} x^2 \approx 4,474479902 \\ 3^y \approx 1,360425497 \\ \log_5 z \approx 3,095524807 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx \pm 2,1153 \\ y \approx 0,2802 \\ z \approx 145,7736 \end{cases}$$

BT 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x^2 + xz - yz + y^2 = 2 & (1) \\ y^2 + xy - yz + z^2 = 0 & (2) \\ x^2 - xy - xz - z^2 = 2 & (3) \end{cases}$

Lời giải và đáp số

Cộng vế theo vế (2) và (3), ta được: $x^2 + y^2 - yz - zx = 2$

Suy ra $3x^2 + xz - yz + y^2 = x^2 + y^2 - yz - zx \Rightarrow x(x+z)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ z = -x \end{array}\right.$

Thay $x = 0$ vào hệ đã cho, ta được: $\begin{cases} -yz + y^2 = 2 \\ y^2 - yz + z^2 = 0 \\ -z^2 = 2 \end{cases}$ (hệ vô nghiệm)

Thay z = – x vào hệ đã cho, ta được: $\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 2 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 - xy = 2 \end{cases}$

Dùng máy giải ta được hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

BT 7. Tìm nghiệm **đúng** của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 13x^3 - 26102x^2 - 2009x - 4030056 = 0 \\ \left(x + \sqrt{x^2 + 4017}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 4017}\right) = 4017\sqrt{3} \end{cases}$$

Lời giải và đáp số

Vào chương trình giải phương trình bậc ba để giải phương trình:

$13x^3 - 26102x^2 - 2009x - 4030056 = 0 \Leftrightarrow x = 2008$.

Thay $x = 2008$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$y + \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{3} - y \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} - y \geq 0 \\ y^2 + 1 = 3 - 2y\sqrt{3} + y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y\sqrt{3} = 2 \\ y \leq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Đáp số: $x = 2008, y = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577350269.$

Lời bình: Ở phương trình $y + \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{3}$ ta sử dụng chức năng SHIFT CALC sẽ tìm được nghiệm của phương trình $x = 0,577350269$, nhưng nghiệm này chỉ là nghiệm gần đúng. Việc sử dụng MTCT kết hợp với các phép biến đổi sơ cấp đưa ta tìm được đáp số đúng của đề bài.

BT 8. Tìm gần đúng nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x + 2011)(y - 2010x) = 9 \\ x^2 + x + y = 6 \end{cases}$$

(Trích Đề thi HSG MTCT 12, Vĩnh Phúc 2012)

Lời giải và đáp số

Đặt $a = x(x + 2011), b = y - 2010x$.

Lúc đó hệ đã cho trở thành $\begin{cases} ab = 9 \\ a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$.

Từ đó ta tìm được $\begin{cases} x = 0,0015 \\ y = 5,9985 \end{cases}, \begin{cases} x = -2011,0015 \\ y = -4042109,9990 \end{cases}$

BT 9. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} & (1) \\ 2y=x^3+5 & (2) \end{cases}$

(Đề thi HSG MTCT Quảng Trị 2012)

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $xy \neq 0$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow (x-y)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=-1 \end{array}\right.$

- TH 1: $\begin{cases} x=y \\ 2y=x^3+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^3-2x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y\approx -2,0946.$

- TH 2: $\begin{cases} xy=-1 \\ 2y=x^3+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{1}{x} \\ x^4+5x+2=0 \quad (*) \end{cases}$

Giải phương trình (*) bằng cách xét hàm số: $f(x)=x^4+5x+2$

Ta thấy hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=4x^3+5, f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-\dfrac{5}{4}}$

Vì $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất nên phương trình (*) có nhiều nhất hai nghiệm.

Sử dụng MTCT ta tìm được hai nghiệm gần đúng là

$\begin{cases} x\approx -1,5478 \\ y\approx 0,6461 \end{cases}; \begin{cases} x\approx -0,4054 \\ y\approx 2,4667 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm:

$\begin{cases} x\approx -1,5478 \\ y\approx 0,6461 \end{cases}; \begin{cases} x\approx -0,4054 \\ y\approx 2,4667 \end{cases}; \begin{cases} x\approx -2,0946 \\ y\approx -2,0946 \end{cases}.$

BT 10. Tìm nghiệm (đúng và gần đúng) của hệ phương trình $\begin{cases} x+y+2xy=-28 \\ x^4+y^4=706 \end{cases}$

(Đề Thi HSG MTCT, Huế 2013).

Lời giải và đáp số

Ta có $x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=\left[(x+y)^2-2xy\right]-2x^2y^2$

Đặt $S=x+y, P=xy$. Lúc đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} S+2P=-28 \\ \left(S^2-2P\right)^2-2P^2=706 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{-28-S}{2} \\ S^4-4S^2P+2P^2=706 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{-28-S}{2}\\ S^4-4S^2.\dfrac{-28-S}{2}+2.\left(\dfrac{-28-S}{2}\right)^2=706\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{-28-S}{2}\\ S^4+96S^2+2S^3-\dfrac{S^2}{2}-1098=0\end{cases}$$

Sử dụng chức năng SHIFT CALC (SOLVE) giải phương trình (2) ta được hai nghiệm $S=2;S=-2,580659359$

- Với $S=2\Rightarrow P=-15$. Lúc đó S,P là nghiệm của phương trình ri

$$X^2-2X-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=-3\\X=5\end{array}\right.$$

- Với $S=-2,580659359\Rightarrow P=-12,70967032$ Lúc đó S,P là nghiệm của phương trình $X^2+2,501058061X-12,70967032=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=2,501058061\\X=-5,081717421\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho co 4 nghiệm

$$\begin{cases}x=-3\\y=5\end{cases};\begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases};\begin{cases}x\approx 2,501058061\\y\approx -5,081717421\end{cases};\begin{cases}x\approx -5,081717421\\y\approx 2,501058061\end{cases}$$

Lời bình: Phương trình (2) là phương trình bậc 4, ta dùng MTCT tìm được hai nghiệm là $S=2;S=-2,580659359$. Mà ta biết phương trình bậc 4 có tối đa bốn nghiệm. Để khỏi xót nghiệm ta làm như sau:

Khi đoán được nghiệm $S=2$ ta sử dụng sơ đồ Hocner hoặc phép chia đa thức phân tích $S^4+2S^3+\dfrac{113}{2}S^2+28S-314=0\Leftrightarrow(S-2)\left(S^3+4S^2+\dfrac{192}{2}S+157\right)=0.$

Dùng MTCT giải phương trình bậc ba $S^3+4S^2+\dfrac{192}{2}S+157=0$ có đúng một nghiệm $S=-2,580659359.$

BT 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+xy=11\\x^2+y^2+3(x+y)=27\end{cases}$.

(Trích đề thi HSG MTCT, Quảng trị 2011).

Lời giải và đáp số

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$. Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases}S+P=11\\S^2-2P+3S=27\end{cases}$

Từ đó: $S^2 + 5S - 49 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = \dfrac{-5 - \sqrt{221}}{2} \\ S = \dfrac{-5 + \sqrt{221}}{2} \end{array}\right.$.

- Với $S = \dfrac{-5 - \sqrt{221}}{2} \Rightarrow P = \dfrac{27 + \sqrt{221}}{2}$.

  Suy ra $\begin{cases} x = -3,0344 \\ y = -6,8987 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -6,8987 \\ y = -3,0344 \end{cases}$

- Với $S = \dfrac{-5 + \sqrt{221}}{2} \Rightarrow P = \dfrac{27 - \sqrt{221}}{2}$.

  Suy ra $\begin{cases} x = 2,5959 \\ y = 2,3371 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2,3371 \\ y = 2,5959 \end{cases}$

BT 12. Giải phương trình:

$$\begin{cases} \left(3x + \sqrt{1 + 9x^2}\right)\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải và đáp số

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow 3x + \sqrt{1 + 9x^2} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1} + y}$$

$$\Leftrightarrow 3x + \sqrt{1 + 9x^2} = \frac{\sqrt{y^2 + 1} - y}{1} = \sqrt{y^2 + 1} + (-y)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ có $f'(t) = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > \dfrac{\sqrt{t^2} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$

Do đó hàm số đồng biến, từ đó $-y = 3x \Leftrightarrow y = -3x$ thay vào phương trình (2) ta được: $10x^2 - 28x - 9 = 0$.

Sử dụng MTCT ta tìm được $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{14 + \sqrt{286}}{10} \to A \Rightarrow y = -3A = -\dfrac{42 + 3\sqrt{286}}{10} \\ x = \dfrac{14 - \sqrt{286}}{10} \to B \Rightarrow y = -3B = \dfrac{-42 + 3\sqrt{286}}{10} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = \dfrac{14 + \sqrt{286}}{10} \\ y = -\dfrac{42 + 3\sqrt{286}}{10} \end{cases}$; $\begin{cases} x = \dfrac{14 - \sqrt{286}}{10} \\ y = \dfrac{-42 + 3\sqrt{286}}{10} \end{cases}$.

BT 13. Giải phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{2x^2+6xy+5y^2}+5=\sqrt{2x^2+6xy+5y^2+14x+20y+25}\\ e^{3x}-y+x^3=0\end{cases}$$

Lời giải và đáp số

Phương trình thứ nhất biến đổi thành:

$$\sqrt{(x+y)^2+(x+2y)}+\sqrt{4^2+3^3}=\sqrt{(x+y+4)^2+(x+2y+3)^2}$$

Xét $\begin{cases}\vec{u}=(x+y;x+2y)\\ \vec{v}=(4,3)\end{cases}$.

Ta có:

$$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{(x+y)^2+(x+2y)}+\sqrt{4^2+3^3}\geq\sqrt{(x+y+4)^2+(x+2y+3)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x+y}{4}=\dfrac{x+2y}{3}\Leftrightarrow x=-5y\Leftrightarrow y=\dfrac{-x}{5}$.

Khi đó: $(2)\Leftrightarrow e^{3x}+\dfrac{1}{5}x+x^3=0$. Rõ ràng vế trái là một hàm đồng biến.

Sử dụng MTCT tìm được nghiệm $x\approx-0,498844936$. Từ đó $y\approx2,49224684$.

BT 14. Tìm nghiệm gần đúng, đúng (nếu có) của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x^2(1+xy)+1-y=xy^2-xy\\ x^4(y^2+x^2)=y+3\end{cases}\quad(\text{ với } x>0,\ y>0)$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2014-2015)

Lời giải và đáp số

Ta có

$$\begin{cases}x^2(1+xy)+1-y=xy^2-xy\\ x^4(y^2+x^2)=y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2(1+xy)+1+xy-(y+xy^2)=0\\ x^4(y^2+x^2)=y+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-y+1=0\\ 1+xy=0\ (\text{loại})\end{array}\right.\\ x^4(y^2+x^2)=y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y+1=0 & (1)\\ x^4(y^2+x^2)=y+3 & (2)\end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$x^4\left[(x^2+1)^2+x^2\right]-(x^2+1)-3=0\Leftrightarrow x^8+3x^6+x^4-x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-1)(x^6+4x^4+5x^2+4)=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=2$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(1;2)$

Chủ đề 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Phương pháp

1. Kiến thức toán: Cần phải nắm vững các kiến thức sau

- Các công thức lượng giác
- Các phương trình lượng giác cơ bản
- Các phương trình lượng giác thường gặp
- Cách giải một số phương trình lượng giác khác (phương trình lượng giác không mẫu mực

2. Kiến thức máy tính

- Chọn máy chế độ đơn vị đo là độ: SHIFT MODE 3
- Chọn máy chế độ đo là radian (rad): SHIFT MODE 4
- Sử dụng được hàm ngược hàm lượng giác: $(\sin^{-1})$, $(\cos^{-1})$, $(\tan^{-1})$

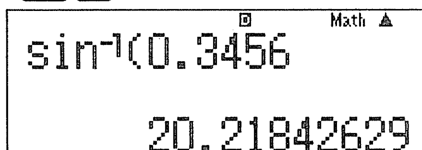
I. Các ví dụ điển hình thường gặp

Ví dụ 1. Cho $\sin\alpha = 0,3456\left(0^0 \le \alpha \le 90^0\right)$. Tính $M = \dfrac{\cos^3\alpha\left(1+\sin^3\alpha\right)+\tan^2\alpha}{\left(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha\right).\cot^3\alpha}$

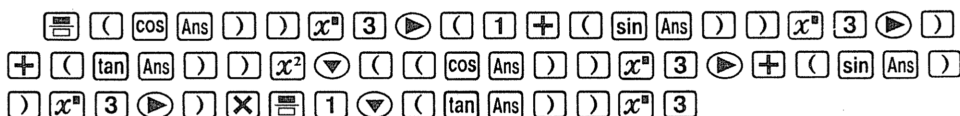
Hướng dẫn thực hành

Tính α: chuyển máy về chế độ đơn vị độ: SHIFT MODE 3

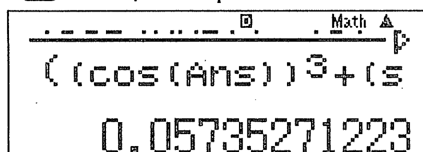
Ấn SHIFT sin 0 • 3 4 5 6 =



Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{\cos^3\alpha\left(1+\sin^3\alpha\right)+\tan^2\alpha}{\left(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha\right).\cot^3\alpha}$ tại giá trị α (giá trị này máy đã lưu vào ô nhớ Ans) bằng cách ấn phím:



Ấn = ta được kết quả:



Kết quả: 0,05735271223.

Ví dụ 2. Cho A, B là hai góc nhọn biết $\sin A = 0,458$, $\cos A = 0,217$.

Tính $\sin(2A - B)$

Hướng dẫn thực hành

Để máy ở chế độ đo độ: SHIFT MODE 3

Quy trình bấm phím

SHIFT sin 0 • 4 5 8 = {tính giá trị góc A}

SHIFT cos 0 • 2 1 7 = {tính giá trị góc B}

Tính $\sin(2A - B)$ bằng cách: sin 2 ALPHA Ans − Ans) DEL

Ấn = ta được kết quả:

```
sin(2PreAns-Ans
     -0.389941478
```

Kết quả: -0.389941478

Nhận xét: Đối với dòng máy tính mới 570 VN Plus, máy có thể lưu tự động đến 2 kết quả gần nhất của phép tính. Ở trên, giá trị góc A được máy lưu vào ô nhớ Pre Ans và giá trị góc B được máy lưu vào ô nhớ Ans.

Ví dụ 3. Cho $\tan x = 2\ (2\pi < x < 3\pi)$ và $2\sin y + 3\cos y = 1\ (0 < y < \pi)$.

Tính gần đúng với 5 chữ số thập phân:

a) $A = \dfrac{\sin^2 x - \cos^3 x}{2\tan^2 x + 3\cot^4 x}$; b) $B = \dfrac{\tan^2(x^2 - y) + \cot^2(x - y^2)}{\sin^2(x^2 + y) + \cos(x + y^2)}$

(Trích đề thi HSGMT Casio TP Hồ Chí Minh, lớp 12, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Để máy ở chế độ Radian: SHIFT MODE 4

Ghi vào màn hình: $\tan^{-1}(2)$ bằng cách: SHIFT tan 2)

Bấm =, ta được 1,107148718

```
tan⁻¹(2)
       1.107148718
```

Ghi vào màn hình: Ans+2$\pi \to$ E bằng cách:

Ans + 2 SHIFT x10ˣ SHIFT RCL cos

```
                 Math ▲
Ans+2π→E

          7.390334025
```

Ghi vào màn hình: $\dfrac{(\sin(E))^2-(\cos(E))^3}{2(\tan(E))^2+3\left(\dfrac{1}{\tan(E)}\right)^4}$ bằng cách

[▭/▭] [(] [sin] [ALPHA] [cos] [)] [)] [x^2] [−] [(] [cos] [ALPHA] [cos] [)] [)] [$x^{■}$] [3] [▼] [2] [(] [tan] [ALPHA] [cos] [)] [)] [x^2] [+] [3] [(] [▭/▭] [1] [▼] [tan] [ALPHA] [cos] [)] [▶] [)] [$x^{■}$] [4]

Bấm [=], ta được $A \approx 0{,}0868$.

b) Ghi vào màn hình: 2sinX+3cosX=1 bằng cách:

[2] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [3] [cos] [ALPHA] [)] [)] [ALPHA] [CALC] [1]

Bấm [SHIFT] [CALC] , nhập giá trị ban đầu cho X (chẳng hạn $\frac{\pi}{2}$), bấm [=] ta được giá trị của X

```
                 Math ▲
2sin(X)+3cos(X)▶
X=     1.877764029
L-R=             0
```

Lưu giá trị này vào biến nhớ Y bằng cách: [SHIFT] [RCL] [S⇔D]

```
                 Math ▲
Ans→Y

          1.877764029
```

Ghi vào màn hình: $\dfrac{\tan^2(E^2-Y)+\cot^2(E-Y^2)}{\sin^2(E^2+Y)+\cos(E+Y^2)}$

Ấn [=], ta được $B \approx -25{,}0153$

Ví dụ 5. Tính gần đúng nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình:

$$4\cos 2x + 3\sin x = 2$$

Phân tích: Ta cần chuyển phương trình lượng giác trên về cùng một cung. Ta có $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$. Tuy nhiên trong phương trình có chứa $3\sin x$ nên ta cần dùng $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai theo $\sin x$

Hướng dẫn thực hành

Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$ thì $\cos 2x = 1 - 2t^2$.

Phương trình đã cho trở thành: $4\left(1-2t^2\right)+3t = 2 \Leftrightarrow 8t^2 - 3t - 2 = 0$.

Chọn chương trình giải phương trình bậc hai: [MODE] [5] [3]

Nhập các hệ số: [8] [=] [−] [3] [=] [−] [2] [=]

Ấn [=] ta được nghiệm thứ nhất: $t_1 = \dfrac{3+\sqrt{73}}{16} \approx 0,7215 \to A$

X1= $\dfrac{3+\sqrt{73}}{16}$

Ấn tiếp phím [=] ta được nghiệm thứ hai: $t_1 = \dfrac{3-\sqrt{73}}{16} \approx -0,3465 \to B$

- Với $t_1 = A \Leftrightarrow \sin x = A$. Để tìm x ta ấn: [SHIFT] [sin] [ALPHA] [(−)] [=] [°'"]

ta được $x_1 \approx 46^0 10'42,53" + k360^0$

sin⁻¹(A

46°10'42.53"

Ấn tiếp: [1] [8] [0] [°'"] [−] [Ans] [=] [°'"] ta được kết quả

$x_2 \approx 133^0 49'17,47" + k360^0$

- Với $t_2 = B \Leftrightarrow \sin x = B$. Để tìm x ta ấn: [SHIFT] [sin] [ALPHA] [°'"] [=] [°'"] ta được

$x_3 \approx -20^0 16'24,25" + k360^0$

sin⁻¹(B

-20°16'24.25"

Ấn tiếp: [1] [8] [0] [°'"] [−] [Ans] [=] [°'"] ta được $x_4 \approx 200^0 16'24,25" + k360^0$

Lời giải và đáp số

Đặt $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$ thì $\cos 2x = 1 - 2t^2$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$4\left(1-2t^2\right)+3t = 2 \Leftrightarrow 8t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{3+\sqrt{73}}{16} \\ t_2 = \dfrac{3-\sqrt{73}}{16} \end{array}\right.$$

- Với $t_1 = \dfrac{3+\sqrt{73}}{16} \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{3+\sqrt{73}}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \approx 46^0 10'42,53'' + k360^0 \\ x_2 \approx 133^0 49'17,47'' + k360^0 \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$
- Với $t_1 = \dfrac{3-\sqrt{73}}{16} \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{3-\sqrt{73}}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 \approx -20^0 16'24,25'' + k360^0 \\ x_4 \approx 200^0 16'24,25'' + k360^0 \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$

Vậy, nghiệm của phương trình là:

$x_1 \approx 46^0 10'42,53'' + k360^0$; $x_2 \approx 133^0 49'17,47'' + k360^0$

$x_3 \approx -20^0 16'24,25'' + k360^0$; $x_4 \approx 200^0 16'24.25'' + k360^0$

Lưu ý:

- Vì đề bài yêu cầu tìm nghiệm gần đúng độ, phút, giây nên trước khi tính toán ta phải để máy ở chế độ Deg: [SHIFT] [MODE] [3]
- Nhắc lại kiến thức phương trình lượng giác cơ bản:

$$\sin x = \sin\left(a^0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - a^0 + k360^0 \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 6. Cho góc nhọn α thoả mãn: $6\cos\alpha + 8\sin\alpha = 5\sqrt{3}$. Tính gần đúng giá trị của biểu thức: $S = 4\cos^4 4\alpha + 3\cos^3\alpha + 2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1$

Hướng dẫn thực hành

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{6^2+8^2} = 10$ ta được:

$$\frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Đặt $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}$, lúc đó phương trình (1) trở thành

$$\sin(\alpha+\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 60^0 - \varphi \\ \alpha_2 = 180 - 60^0 - \varphi \end{array}\right.$$

Để tìm α_1 ta ấn như sau: [6] [0] [°'''] [−] [SHIFT] [cos] [4] [▭/▭] [5] [=] [°''']

ta được kết quả: $\alpha_1 \approx 23^0 7'48,37'' \to A$ {đưa vào ô nhớ A}

```
D          Math ▲
60°-cos⁻¹(4/5
        23°7'48.37"
```

Để tìm α_2 ta ấn như sau:

[1] [8] [0] [°'''] [−] [6] [0] [°'''] [−] [SHIFT] [cos] [4] [▭/▭] [5] [=] [°''']

ta được kết quả: $\alpha_2 \approx 83^0 7'48,37'' \to B$ {đưa vào ô nhớ B}

```
180°-60°-cos⁻¹(4/5
            83°7'48.37"
```

Để tính giá trị của biểu thức S với các giá trị α_1, α_2 tương ứng ta sử dụng chức năng [CALC].

Nhập vào màn hình: $4\cos^4 4X + 3\cos^3 X + 2\cos^2 X + \cos X + 1$ bằng cách:

[4] [(] [cos] [4] [ALPHA] [)] [)] [)] [$x^■$] [4] [▶] [+] [3] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [$x^■$] [3] [▶] [+] [2] [(] [cos] [ALPHA] [)] [)] [)] [x^2] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [1]

Ấn [CALC], nhập [ALPHA] [(−)] ấn [=] ta được kết quả $S_1 \approx 5,94415$

```
4(cos(4X))⁴+3(c▶
          5.944148884
```

Ấn [CALC], nhập [ALPHA] [°'"] ấn [=] ta được kết quả $S_2 \approx 3,63134$

```
4(cos(4X))⁴+3(c▶
          3.631344457
```

Lời giải và đáp số

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{6^2+8^2} = 10$ ta được:

$$\frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Đặt $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, lúc đó phương trình (1) trở thành

$$\sin(\alpha+\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 60^0 - \varphi \approx 23^0 7'48,37'' \\ \alpha_2 = 180 - 60^0 - \varphi \approx 83^0 7'48,37'' \end{array}\right.$$

- Với $\alpha_1 \approx 23^0 7'48,37''$ thay vào biểu thức ta được $S_1 \approx 5,94415$
- Với $\alpha_2 \approx 83^0 7'48,37''$ thay vào biểu thức ta được $S_2 \approx 3,63134$

Lưu ý: Đối với phương trình bậc nhất theo sinx và cosx: $a\sin x + b\cos x = c$

Cách giải: Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Đặt: $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (\alpha \in [0, 2\pi])$

phương trình trở thành: $\sin\alpha.\sin x + \cos\alpha.\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta \quad (2)$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge c^2.$$

$(2) \Leftrightarrow x = \alpha \pm \beta + k2\pi \quad (k \in Z)$

Ví dụ 7. Tìm gần đúng (độ, phút, giây) của phương trình:

$$3(\sin x + \cos x) - 5\sin x\cos x = 2$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Thanh Hóa 2011)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+45^0\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Phương trình đã cho trở thành: $3t + 5.\dfrac{1-t^2}{2} = 2 \Leftrightarrow -5t^2 + 6t + 1 = 0$

Chọn chương trình giải phương trình bậc hai: [MODE] [5] [3]

Nhập các hệ số: [−] [5] [=] [6] [=] [1] [=]

Ấn [=] ta được nghiệm thứ nhất: $t_1 = \dfrac{3+\sqrt{14}}{5} \approx 1,3483 \to A$

```
D            Math▼
X1=
                3+√14
                  5
```

Ấn [=] ta được nghiệm thứ hai: $t_2 = \dfrac{3-\sqrt{14}}{5} \approx -0,1483 \to B$

```
D            Math▼▲
X2=
                3−√14
                  5
```

- Với $t_1 = A \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+45^0\right) = A$. Để tìm x ta ấn như sau:

[SHIFT] [sin] [ALPHA] [(−)] [▭/▭] [√■] [2] [▶] [▶] [)] [−] [4] [5] [°'''] [=] [°''']

ta được kết quả $x_1 \approx 27^0 26'33'' + k360^0$

```
sin⁻¹(A/√2)-45°
              27°26'32.75"
```

Ấn tiếp [1] [8] [0] [°'''] [−] [Ans] [=] [°'''] ta được kết quả

$x_2 \approx 152^0 33'27,25'' + k360^0$

```
180°-Ans
              152°33'27.25"
```

Với $t_2 = B \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + 45^0\right) = B$. Để tìm x ta ấn như sau:

[SHIFT] [sin] [ALPHA] [°'''] [▭/▭] [√▭] [2] [▶] [▶] [)] [−] [4] [5] [°'''] [=] [°''']

ta được kết quả $x_3 \approx -51^0 01'14,2'' + k360^0$

```
sin⁻¹(B/√2)-45°
              -51°1'14.2"
```

Ấn tiếp: [1] [8] [0] [°'''] [−] [Ans] [=] [°''']ta được kết quả

$x_4 \approx 231^0 01'14,2'' + k360^0$

```
180°-Ans
              231°1'14.2"
```

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình là:

$x_1 \approx 27^0 26'33'' + k360^0$; $x_2 \approx 152^0 33'27,25'' + k360^0$

$x_3 \approx -51^0 01'14,2'' + k360^0$; $x_4 \approx 231^0 01'14,2'' + k360^0$

Lời giải và đáp số

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + 45^0\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Phương trình đã cho trở thành

$$3t + 5.\frac{1 - t^2}{2} = 2 \Leftrightarrow -5t^2 + 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{3 + \sqrt{14}}{5} \\ t_2 = \dfrac{3 - \sqrt{14}}{5} \end{array}\right.$$

- Với $t_1 = \dfrac{3+\sqrt{14}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+45^0\right) = \dfrac{3+\sqrt{14}}{5}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \approx 27^0 26'33'' + k360^0 \\ x_2 \approx 152^0 33'27,25'' + k360^0 \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

- Với $t_2 = \dfrac{3-\sqrt{14}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+45^0\right) = \dfrac{3-\sqrt{14}}{5}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 \approx -51^0 01'14,2'' + k360^0 \\ x_4 \approx 231^0 01'14,2'' + k360^0 \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Lưu ý: Phương trình đối xứng: a.(sinx ± cosx) + b.sinx.cosx + c = 0

Đặt: $t = \cos x \pm \sin x = \sqrt{2}.\cos\left(x \mp \dfrac{\pi}{4}\right); \ |t| \le \sqrt{2}.$

$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \pm\dfrac{1}{2}(t^2-1).$

Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t.

Giải phương trình này tìm t thỏa $|t| \le \sqrt{2}$. Suy ra x.

Chú ý hai công thức đặc biệt sau:

- $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
- $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Ví dụ 8. Giải phương trình sau:

$$2\sin^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = 1.$$

Hướng dẫn thực hành

Nhận thấy $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\tan^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} - 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\tan + \sqrt{3} - 1 = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\tan + \sqrt{3} - 2 = 0$$

Vào chương trình giải phương trình bậc hai: MODE 5 3

Nhập các hệ số: 1 = 3 + √■ 3 = √■ 3 ▶ − 2 =

Ấn = ta được nghiệm thứ nhất: $t_1 \approx 0,05596 \to A$

X1=
0.0559624995З

Ấn tiếp phím [=] ta được nghiệm thứ hai: $t_2 \approx -4,78801 \to B$

X2=
-4.788013307

- Với $t_1 \approx 0,05596 \Leftrightarrow \tan x = A$. Để tìm x ta ấn như sau:

[SHIFT] [tan] [ALPHA] [(−)] [=] ta được nghiệm $x_1 \approx 0,0559 + k\pi$

tan⁻¹(A
0.05590418792

- Với $t_2 \approx -4,78801 \Leftrightarrow \tan x = B$. Để tìm x ta ấn như sau:

[SHIFT] [tan] [ALPHA] [°'"] [=] ta được nghiệm $x_2 \approx -1,3649 + k\pi$

tan⁻¹(B
-1.364901127

Lời giải và đáp số

Nhận thấy $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\tan^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} - 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\Leftrightarrow 2\tan^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\tan + \sqrt{3} - 1 = 1 + \tan^2 x$$
$$\Leftrightarrow \tan^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\tan + \sqrt{3} - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x \approx 0,05596\\ \tan x \approx -4,78801\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 \approx 0,0559 + k\pi\\ x_2 \approx -1,3649 + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x_1 \approx 0,0559 + k\pi$, $x_2 \approx -1,3649 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Lưu ý: Đối với phương trình lượng giác cơ bản $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 9. Cho phương trình: $2\cos^2 x + \cot^2 x = \dfrac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}$. Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình trên đoạn $\left[0;50\right]$ (kết quả gần đúng với 10 chữ số thập phân)

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $\sin x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$2\cos^2 x + \cot^2 x = \sin x + 1 + \cot^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$

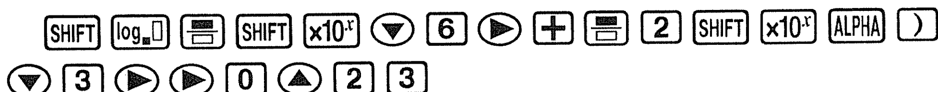
Ta phải có: $0 \le \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \le 50 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \le k \le \dfrac{300-\pi}{4\pi} \Rightarrow k = \overline{0,23}$

Dãy các nghiệm của phương trình lập thành cấp số cộng gồm 24 số hạng có tổng được tính bởi:

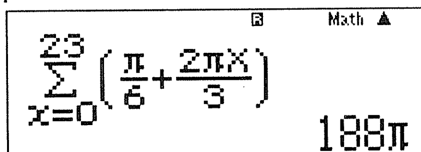
$$S = \frac{24\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{46\pi}{3}\right)}{2} = 188\pi \approx 590,6194188749.$$

Lời bình: Ngoài cách sử dụng công thức tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng là $S = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2}$ ta có thể dùng chức năng $\sum_{\square}^{\square}\square$, cụ thể như sau:

Nhập vào màn hình $\sum_{x=0}^{23}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi X}{3}\right)$ bằng cách:



Ấn = ta được kết quả 188π.



Ví dụ 10. Tính gần đúng nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình:

$$\cos 4x + \cos 3x + 23\cos^3 x - 79\cos^2 x + 23\cos x + 20 = 0 \quad (1)$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2011)

Lời giải và đáp số

Ta có:

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$

Phương trình đã cho trở thành

$8\cos^4 x + 27\cos^3 x - 87\cos^2 x + 20\cos x + 21 = 0$

Đặt $t = \cos x, t \in [-1;1]$, phương trình (1) tương đương với

$8t^4 + 27t^3 - 87t^2 + 20t + 21 = 0$

Dùng chức năng SHIFT CALC giải phương trình ta được

$t=-0,375=-\frac{3}{8}; t\approx 0,769149633$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là:

$x_1\approx \pm 112^0 01'28"+k360^0; x_2\approx \pm 39^0 43'21"+k360^0.$

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Tính gần đúng các nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình

$\sin^2 2x+5(\sin x-\cos x)=2$ ứng với $t=\sin x-\cos x>0$.

Lời giải và đáp số

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right); 0<t\le\sqrt{2}$

Phương trình trở thành: $t^4-2t^2+5t-1=0\ (0<t\le\sqrt{2})$

$t\approx 0,218669211\Rightarrow \sin(x-45^0)=\frac{t}{\sqrt{2}}\approx 0,154622482$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-45^0\approx 8^0 53'41"\\ x-45^0\approx 171^0 6'18"\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1\approx 53^0 53'41"+k.360^0\\ x_2\approx 216^0 6'18"+k.360^0\end{array}\right.$

BT 2. Tính gần đúng nghiệm (theo đơn vị độ, phút, giây) của phương trình

$3(\sin x+\cos x)=2\sqrt{3}\cos^2 2x-\left(3+\sqrt{3}\right)$

Lời giải và đáp số

Phương trình đã cho tương đương:

$3(\sin x+\cos x)-2\sqrt{3}\cos^2 2x+\left(3+\sqrt{3}\right)=0\ (1)$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-45^0\right), t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$; $\sin 2x=t^2-1$

$f(x)=3(\sin x+\cos x)-2\sqrt{3}\cos^2 2x+\left(3+\sqrt{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow 3t-2\sqrt{3}\left(1-\left(t^2-1\right)^2\right)+\left(3+\sqrt{3}\right)=0$

Xét $g(t)=2\sqrt{3}t^4-4\sqrt{3}t^2+3t+3+\sqrt{3}, t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Nhập vào màn hình: $2\sqrt{3}X^4-4\sqrt{3}X^2+3X+3+\sqrt{3}$

Ấn CALC nhập (−) √■ 2 = ta được $g\left(-\sqrt{2}\right)>0$

Ấn CALC nhập (−) 1 = ta được $g\left(-1\right)<0$

Ấn CALC nhập [−] [0] [.] [5] [=] ta được $g(-0.5) > 0$

(Có thể kiểm tra bằng chức năng TABLE)

Dùng chức năng SOLVE với giá trị đầu $X = -\sqrt{2}$ ta tìm được một nghiệm $t_1 \approx -1.38268577$

Dùng chức năng SOLVE với giá trị đầu $X = -0.5$ ta tìm được một nghiệm $t_2 \approx -0.708709924$

Giải phương trình $\cos\left(x - 45^0\right) = \frac{t}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 45^0 \pm \cos^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + k360^0,\ k \in \mathbb{Z}$,

ta được các nghiệm:

$x_1 \approx 212^0 52'45" + k360^0$; $x_2 \approx -122^0 52'45" + k360^0$;

$x_3 \approx 165^0 4'28" + k360^0$; $x_4 \approx -75^0 4'28" + k360^0$

BT 3. Tìm giá trị đúng tổng S tất cả các nghiệm thực của phương trình sau trên đoạn [0; 70]:

$$3\sin 2x - 4\sin 2x.\sin^2 x - 2\cos x = 0$$

Lời giải và đáp số

Biến đổi phương trình về dạng $\cos x.(\sin 3x - 1) = 0$, ta tìm được nghiệm .

$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (1) , $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$ (2) ,$k \in \mathbb{Z}$

Họ (1) nhận $k = \overline{0,10}$, họ (2) nhận $k = \overline{0,33}$

Đặt $S_1 = \sum_{k=0}^{10}\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = \frac{231\pi}{2}$, $S_2 = \sum_{k=0}^{33}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}\right) = \frac{1139\pi}{3}$

Suy ra: $S = S_1 + S_2 = \frac{2971\pi}{6}$.

BT 4. Tìm tất cả các nghiệm gần đúng của phương trình sau trong khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$

$$\cos x + \sin x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}.$$

Lời giải và đáp số

Đặt $t = \sin x + \cos x, |t| < \sqrt{2}$. Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$$3t^3-10t^2+3t+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=2\\ t_2=\dfrac{2+\sqrt{19}}{3}\\ t_3=\dfrac{2-\sqrt{19}}{3}\end{array}\right.$$

Chọn t_3 ta được

$$\sin x+\cos x=\frac{2-\sqrt{39}}{3}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{39}}{3\sqrt{2}}\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}$$

Dùng MTCT ta tính được $x\approx 2{,}9458$.

BT 5. Tìm gần đúng (độ, phút, giây) nghiệm của phương trình:

$$4\cos 2x+3\sin x=2$$

Lời giải và đáp số

Biến đổi phương trình đã cho về dạng:

$$8\sin^2 x-3\sin x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x\approx 0{,}7215\\ \sin x\approx -0{,}3465\end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình là:

$x\approx 46^0 10'43''+k360^0$; $x\approx 133^0 49'17''+k360^0$;
$x\approx -20^0 16'24''+k360^0$; $x\approx 200^0 16'24''+k360^0$

BT 6. Tìm nghiệm gần đúng (độ, phút, giây) của phương trình

$$2\sin^3 x-(1+\sqrt{2})\sin^2 x.\cos x+(2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-4)\sin x.\cos^2 x$$
$$-\sin x+(1-\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3)\cos^3 x=0$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Đồng Tháp 2011)

Lời giải và đáp số

Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x\neq 0$ ta được:

$$\tan^3 x-\left(1+\sqrt{2}\right)\tan^2 x+\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-5\right)\tan x+\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)=0$$

Giải phương trình bậc ba ta được: $\left[\begin{array}{l}\tan x\approx 1{,}732050808\\ \tan x\approx 0{,}2679192\\ \tan x\approx 0{,}414213562\end{array}\right.$.

Từ đó ta suy ra được nghiệm x của phương trình

Đáp số: $x=60^0+k180^0; x=22^0 30'+k180^0; x=15^0+k180^0$.

BT 7. Cho phương trình: $\cos 4x-\cot^2 x=\dfrac{(1-\cos 2x)\sin^2 x-1}{\sin^2 x}$ (1)

a. Tìm giá trị đúng các họ nghiệm của phương trình (1) trên tập $\mathbb{R}$.

b. Tính giá trị đúng của tổng tất cả các nghiệm phương trình (1) trên đoạn $[-1;64]$.

(Trích Đề thi HSG MTCT Cần Thơ 2011)

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$, phương trình được biến đổi về dạng:

$\cos 4x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow 4x = \pm(\pi - 2x) + m2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3}$ $(m \in \mathbb{Z})$ (thỏa điều kiện)

Vì $x \in [-1; 64]$ nên $m = \overline{-1, 60}$. Sử dụng chức năng phím $\sum_{\square}^{\square}\square$ ta tìm được tổng tất cả các nghiệm trên đoạn $[-1; 64]$ là $S = 620\pi$.

BT 8. Tìm nghiệm gần đúng (theo đơn vị độ, phút, giây) của phương trình

$\cos 4x + \cos 3x + 21\cos^3 x + 34\cos^2 x + 6\cos x - 27 = 0$

(Trích Đề thi HSG MTCT Đồng Tháp 2011)

Lời giải và đáp số

Thay thế

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Đặt $t = \cos x$, $|t| \leq 1$

Khi đó ta có phương trình

$8t^4 + 25t^3 + 26t^2 + 3t - 26 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(8t^3 + 9t^2 + 8t - 13) = 0$
$\Leftrightarrow t \approx 0,7075563476$

Suy ra $x \approx \pm 44^0 57' 48,82''$. Vậy $x \approx \pm 44^0 57' 49'' + k.360^0$

BT 9. Tính gần đúng nghiệm (độ, phút, giây) của phương trình:

$\cos^6 x + \sin^6 x + 5\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0$

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2012)

Lời giải và đáp số

$\cos^6 x + \sin^6 x + 5\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0$ (1)

Ta có: $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 + 3\cos^4 x - 3\cos^2 x$

Nên: (1) $\Leftrightarrow 3\cos^4 x + 5\cos^3 x - 3\cos^2 x - 6\cos x + 2 = 0$

Đặt $t = \cos x$ $(-1 \leq t \leq 1)$, phương trình (1) tương đương:

$3t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 6t + 2 = 0$ $(-1 \leq t \leq 1)$

Dùng chức năng SOLVE giải phương trình ta được hai nghiệm:

$t_1 = 0,314691610$; $t_2 \approx 0,921570007$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là:

$x_1 \approx \pm 71^0 39'28'' + k360^0$; $x_2 \approx \pm 22^0 50'36'' + k360^0$

BT 10. Tìm nghiệm gần đúng (độ, phút, giây) của phương trình:

$$\sin^2 2x + 4(\sin x + \cos x) = 3$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Tuyên Quang 2012)

Lời giải và đáp số

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - 45^0)$; $\sin 2x = t^2 - 1$

Phương trình tương đương: $t^4 - 2t^2 + 4t - 2 = 0$, $(|t| \le \sqrt{2})$

Dùng chức năng SOLVE giải phương trình được 1 nghiệm $t \approx 0,676444288$

Với $t \approx 0,676444288 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x - 45^0) = 0,676444288$

Đáp số: $x_1 \approx 106^0 25'28'' + k\,360^0$, $x_2 = 16^0 25'28'' + k\,360^0$

BT 11. Tìm nghiệm gần đúng (độ, phút, giây) của phương trình

$$\sin^3 x - 3\cos x - 6\sin x\cos^2 x + 7\cos^3 x = 0.$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Cần Thơ 2012)

Lời giải và đáp số

Do $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ và đặt $t = \tan x$ ta được phương trình: $t^3 - 3t^2 - 6t + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 \approx 4,201472338 \\ t_2 \approx 0,5450959088 \\ t_3 \approx -1,746568247 \end{array}\right.$ từ đó suy ra x

Đáp số:

$x_1 \approx 76^0 36'43'' + k.180^0; x_2 \approx 28^0 35'40'' + l.180^0; x_3 \approx -60^0 12'23'' + m.180^0$ với $k, l, m \in \mathbb{Z}$

BT 12. Tìm nghiệm gần đúng (độ, phút, giây) của phương trình

$$4\sin^2 2x + 10(\sin x + \cos x) = 7.$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Quảng Ninh 2012)

Lời giải và đáp số

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + 45^0\right), t \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Suy ra $\sin 2x = t^2 - 1$. Phương trình đã cho trở thành: $4t^4 - 8t^2 + 10t - 3 = 0$.

Xét hàm số: $f(t) = 4t^4 - 8t^2 + 10t - 3, f'(t) = 16t^3 - 16t + 10, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0$

Ta thấy $f(t_0) < 0$ và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(t) = +\infty$ nên phương trình $f(t) = 0$ có hai nghiệm.

Dùng chức năng SHIFT CALC ta tìm được hai nghiệm gần đúng của t là $t_1 > t_2$ (t_2 không thỏa điều kiện)

Với $t = t_1 = \sqrt{2}\sin\left(x + 45^0\right)$ từ đây ta tìm được x.

Đáp số: $x \approx -26^0 53'2'' + k360^0, x \approx 116^0 53'2'' + k360^0$

BT 13. Tìm nghiệm gần đúng (tính theo đơn vị độ, phút, giây) của phương trình:

$$\sqrt{5}\cos 3x + 8\sin^2 x - 2 = 0$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Đồng Tháp 2012)

Lời giải và đáp số

Ta có:

$$\sqrt{5}\cos 3x + 8\sin^2 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + 8\left(1 - \cos^2 x\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{5}\cos^3 x - 8\cos^2 x - 3\sqrt{5}\cos x + 6 = 0$$

Đặt t = cosx ta được $4\sqrt{5}t^3 - 8t^2 - 3\sqrt{5}t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2\sqrt{5}}{5}; t = \frac{\sqrt{3}}{2}; t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Đáp số

$$x \approx 26^0 33'54" + k360^0; x \approx -26^0 33'54" + k360^0; x = 30^0 + k360^0$$
$$x = -30^0 + k360^0; x = 150^0 + k360^0; x = -150^0 + k360^0$$

BT 14. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình:

$\sqrt{3}\sin 2x + 1 = 2\cos x - \cos 2x$, biết $270^0 < x < 450^0$.

Lời giải và đáp số

Cách 1: Ta có

$$\sqrt{3}\sin 2x + 1 = 2\cos x - \cos 2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1\right)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \end{array}\right.$$

- Với cosx = 0 dùng chức năng mode 7 với start? 270, End? 450 và Step? 90 thì vô nghiệm.
- $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$ dùng chức năng mode 7 với start? 270, End? 450 và Step? 30 thì phương trình có 1 nghiệm $x = 360^0$.

Cách 2

Phương trình: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$ có $a = \sqrt{3}, b = 1, c = 1$ nên $b + c \neq 0$

Ta có: $x = 2\arctan\left(\dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}\right) + k360^0 \ (k \in Z)$.

Nhập vào màn máy tính: $\sqrt{3} \to A,\ 1 \to B,\ 1 \to C$

Dùng MTCT ta tính được:

$$x = 2\arctan\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}\right) = 120^0 \text{ (loại)},$$

$$x = 2\arctan\left(\frac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}\right) = 0^0 \Rightarrow x = 360^0 \text{ (chọn } k=1\text{)}.$$

BT 15. Giải phương trình sau theo độ, phút, giây

$$4\sin^4 x + 1 - \sqrt{2+\sin 2x} = \cos^2 2x$$

Hướng dẫn giải

Phương trình được viết thành: $4\sin^2 x - \sqrt{2+2\sin x\cos x} = 0$

Do $\cos x = 0$ không thỏa phương trình, nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ và đặt $t = \tan x$, ta được phương trình:

$$4t^2 - \sqrt{2(1+t^2)^2 + 2t(1+t^2)} = 0$$

Dùng TABLE kiểm tra thì phương trình có hai nghiệm thuộc các khoảng $(-0.6;-0.5)$ và $(0.8;0.9)$.

Nhập phương trình vào máy tính rồi giải ta được các nghiệm là:

$$t = -0,5994; t = 0,8727$$

Vậy phương trình ban đầu có các nghiệm là:

$$x = -30^0 56'18" + k180^0; x = 41^0 6'42" + k180^0$$

BT 16. Tìm nghiệm gần đúng (độ phút giây) của phương trình:

$$\frac{1}{2} + \sin^3 2x + \cos^3 2x = \frac{4}{3}\sin 2x$$

(Trích Đề thi HSG MTCT Đồng Tháp 2014)

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x+45^0\right), t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Suy ra: $t^3 = \sin^3 2x + \cos^3 2x + 3\left(\frac{t^2-1}{2}\right)t$, với $\sin 4x = t^2 - 1$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{1}{2} + t^3 - \frac{3\left(t^2-1\right)t}{2} = \frac{4}{3}\left(t^2-1\right) \Leftrightarrow 3t^3 + 8t^2 - 9t - 11 = 0$$

Dùng MTCT giải phương trình bậc ba ta được

$\left[\begin{array}{l} t \approx -3,2430 \\ t \approx 1,3898 \\ t \approx -0,8134 \end{array}\right.$. Từ đó ta tìm được các nghiệm của phương trình là

$x \approx 17^0 10'40,91" + k180^0; x \approx 27^0 49'19,09" + k180^0;$
$x \approx -40^0 3'24,74" + k180^0; x \approx 85^0 3'24" + k180^0;$

Chủ đề 5: ĐA THỨC

Phương pháp

1. Định lý Bezout: Số dư trong phép chia $P(x)$ cho nhị thức $ax+b$ chính là $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

Từ đó ta có các kết quả sau:

- Nếu a là nghiệm của $P(x)$ thì $P(x)$ chia hết cho $x-a$ hay $P(a)=0$
- Khi chia đa thức $P(x)$ cho nhị thức $ax+b$ ta luôn được

$P(x)=Q(x)(ax+b)+r$, trong đó r là một số (không chứa biến x).

Thế $x=-\frac{b}{a}$ ta được $P\left(-\frac{b}{a}\right)=r$

2. Sơ đồ Horner:

Viết $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ dưới dạng

$P(x)=(\ldots(a_0x+a_1)x+a_2)x+\ldots)x+a_n$

Vậy $P(x_0)=(\ldots(a_0x_0+a_1)x_0+a_2)x_0+\ldots)x_0+a_n$.

Đặt $b_0=a_0; b_1=b_0x_0+a_1; b_2=b_1x_0+a_2;\ldots; b_n=b_{n-1}x_0+a_n$.

Suy ra: $P(x_0)=b_n$.

Từ đây ta có công thức truy hồi: $b_k=b_{k-1}x_0+a_k$ với $k\ge 1$.

3. Đa thức nội suy Newton

Giả sử chúng ta có đa thức sau đây: $P(x)=2x^2-3x+3$.

Cho x một vài giá trị, chúng ta tính được giá trị của $P(x)$ như sau:

$P(1)=2; P(2)=5; P(3)=12;\ldots$

Câu hỏi đặt ra, nếu ngược lại, chúng ta biết được $P(1)=2; P(2)=5; P(3)=12$ thì liệu chúng ta có thể tìm lại được đa thức $P(x)$ hay không?

Nhận xét 1: Nếu chúng ta không hạn chế về bậc của đa thức $P(x)$ thì sẽ tồn tại vô số các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(1)=2; P(2)=5; P(3)=12$.

Thật vậy, nếu chúng ta tìm được một đa thức thỏa mãn điều kiện này thì chúng ta có thể tạo ra vô số các đa thức $G(x)$ thỏa mãn điều kiện trên bằng cách cho

$G(x)=P(x)+(x-1)(x-2)(x-3)H(x)$

và chúng ta có $G(1)=P(1), G(2)=P(2), G(3)=P(3)$

Nhận xét 2: Nếu chúng ta hạn chế bậc của đa thức và yêu cầu đa thức $P(x)$ phải có bậc bé thua hoặc bằng 2 thì sẽ tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ có bậc bậc bé thua hoặc bằng 2 thỏa mãn điều kiện: $P(1)=2;P(2)=5;P(3)=12$.

Thật vậy, nếu $G(x)$ là một đa thức khác có bậc bé thua hoặc bằng 2 thỏa mãn điều kiện

$G(1)=2,G(2)=5,G(3)=12$ thì chúng ta lấy $H(x)=G(x)-P(x)$

$H(x)$ là một đa thức có bậc bé thua hoặc bằng 2 thỏa mãn $H(1)=H(2)=H(3)=0$, điều này chứng tỏ $H(x)$ có đến 3 nghiệm, trong khi bậc của nó chỉ bé thua hoặc bằng 2. Vậy $H(x)$ phải là đa thức hằng số 0. Do đó $G(x)=P(x)$, điều này chứng tỏ chỉ tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$.

Định lý: Nếu $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ là $n+1$ số thực khác nhau và $y_1,y_2,...,y_n,y_{n+1}$ là $n+1$ số thực bất kỳ. Thì sẽ **tồn tại duy nhất** một đa thức $P(x)$ có bậc bé thua hoặc bằng n thỏa mãn điều kiện:

$P(x_1)=y_1,P(x_2)=y_2,...,P(x_n)=y_n,P(x_{n+1})=y_{n+1}$.

Định lý trên nói rằng: Một đa thức bậc bé thua hoặc bằng n sẽ được xác định một cách duy nhất bằng $n+1$ giá trị của nó.

Tổng quát: Nếu $x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}$ là $n+1$ số thực khác nhau và $y_1,y_2,...,y_n,y_{n+1}$ là $n+1$ số thực bất kỳ. Chúng ta sẽ tìm đa thức $P(x)$ có bậc bé hơn hoặc bằng n thỏa mãn

$P(x_1)=y_1,P(x_2)=y_2,...,P(x_n)=y_n,P(x_{n+1})=y_{n+1}$

Đa thức $P(x)$ sẽ có dạng:

$$P(x)=\alpha_1+\alpha_2(x-x_1)+\alpha_3(x-x_1)(x-x_2)+...+\alpha_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

Công thức này được gọi là công thức **nội suy Newton.** Nếu chúng ta thay $x=x_1$ vào công thức nội suy Newton, thì chúng ta sẽ xác định được giá trị của hệ số α_1. Tiếp đó, chúng ta thay $x=x_2$ vào công thức nội suy Newton thì chúng ta sẽ xác định được α_2. Tương tự như vậy, hệ số cuối cùng α_{n+1} sẽ được xác định nếu chúng ta thay $x=x_{n+1}$.

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Đa thức bậc ba $P(x)$ có $P(1)=5, P(2)=7, P(3)=9, P(4)=12$. Tính $P(2009)$.

(Trích đề thi HSGMTCT 11 TP.HCM , 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Đặt $Q(x)=2x+3$. Ta có: $Q(1)=5, Q(2)=7, Q(3)=9$

Đặt $H(x)=P(x)-Q(x)$ với $H(x)$ là đa thức bậc ba và:

$H(1)=H(2)=H(3)=0 \Rightarrow H(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$

Ta có: $H(4)=P(4)-Q(4)=1 \Leftrightarrow a(4-1)(4-2)(4-3)=1 \Rightarrow a=\frac{1}{6}$.

$$P(x)=H(x)+Q(x)=\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+2x+3$$

Ghi vào màn hình: $\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)+2X+3$

Ấn CALC nhập 2009, ấn =. Kết quả: 1347386077.

Vậy $P(2009)=1347386077$.

Lời bình: Với máy tính cầm tay Vinacal 570 ES Plus II có thêm chức năng giải hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn. Do đó ta có thể giải bài toán trên theo cách sau:

Đặt $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$

$P(1)=5 \Leftrightarrow a+b+c+d=5$ (1)
$P(2)=7 \Leftrightarrow 8a+4b+2c+d=7$ (2)
$P(3)=9 \Leftrightarrow 27a+9b+3c+d=9$ (3)
$P(4)=12 \Leftrightarrow 64a+16b+4c+d=12$ (4)

Giải hệ phương trình (1),(2),(3),(4) bằng cách:

Chọn chương trình giải hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn: MODE 5 3

Nhập các hệ số:

1 = 1 = 1 = 1 = 5 = 8 = 4 = 2 = 1 = 7 = 2 7 = 9 = 3 = 1 = 9 = 6 4 = 1 6 = 4 = 1 = 1 2 =

Ấn = ta được $a=\frac{1}{6}, b=-1, c=\frac{23}{6}, d=2$.

Vậy $P(x)=\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{23}{6}x+2$.

Sử dụng chức năng CALC ta tính được $P(2009)=1347386077$

Lời giải này thiên về máy tính nhiều hơn. Tuy nhiên cách giải ban đầu vẫn sáng tạo hơn, không cần dùng nhiều về MTCT.

Ví dụ 2. Cho đa thức thỏa $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 132005$.

Biết $P(1) = 8$, $P(2) = 11$, $P(3) = 14$, $P(4) = 18$. Tính $P(x)$ với $x = 11, 12, 13, 14$.

Hướng dẫn thực hành

Đặt $f(x) = 3x + 5$ ta có: $f(1) = 8$, $f(2) = 11$, $f(3) = 14$

Ta cần xác định đa thức h(x) bậc 3

$h(x) = m(x-1)(x-2)(x-3) + 3x + 5$

Vì $h(4) = 18$ nên $m = \frac{1}{6}$ suy ra $h(x) = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + 3x + 5$

Suy ra

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x+n) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + 3x + 5$$

Vì P(0) = 132005 nên $n = \frac{132001}{24}$

Suy ra

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\left(x + \frac{132001}{24}\right) + \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + 3x + 5$$

Ghi vào màn hình:

$$(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)\left(X + \frac{132001}{24}\right) + \frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3) + 3X + 5$$

Bấm CALC, nhập giá trị 11 cho X, bấm = ta được giá trị của P(11) là 27775808

Bấm CALC, nhập giá trị 12 cho X, bấm = ta được giá trị của P(12) là 43655576

Bấm CALC, nhập giá trị 13 cho X, bấm = ta được giá trị của P(13) là 65495199

Bấm CALC, nhập giá trị 14 cho X, bấm = ta được giá trị của P(14) là 94621288

Vậy P(11) = 27775808; P(12) = 43655576; P(13) = 65495199; P(14) = 94621288

Ví dụ 3. Xác định phần dư $R(x)$ của phép chia

$P(x) = 1 + x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$ chia $x^3 - x$. Rồi tính $R(701,4)$

Hướng dẫn thực hành

Đặt: $P(x) = (x^3 - x)Q(x) + R(x)$ với $R(x) = mx^2 + nx + p$

Ta có $P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x) + R(x)$

Theo định lí Bezout: Dư của phép chia P(x) cho $x - a$ là $P(a)$

Suy ra:

Dư của phép chia P(x) cho (x - 1) là P(1) = R(1)

Dư của phép chia P(x) cho x là P(0) = R(0)

Dư của phép chia P(x) cho (x + 1) là P(- 1) = R(- 1)

Ghi vào màn hình: $1 + x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$

Bấm CALC, nhập giá trị - 1 cho X, bấm = ta được $R(-1) = m - n + p = -4$.

Bấm CALC, nhập giá trị 0 cho X, bấm = ta được $R(0) = p = 1$.

Bấm CALC nhập giá trị 1 cho X, bấm = ta được $R(1) = m + n + p = 6$.

Suy ra ta có hệ: $\begin{cases} m - n + p = -4 \\ p = 1 \\ m + n + p = 6 \end{cases}$ (*)

Dùng máy tính giải hệ (*), ta được: $m = 0,\ n = 5,\ p = 1$

Do đó: $R(x) = 5x + 1$, suy ra $R(701,4) = 3508$

Vậy $R(x) = 5x + 1$ và $R(701,4) = 3508$.

Ví dụ 4. Cho đa thức bậc 5: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 26122008$

Biết rằng $f(6) = 6,\ f(26) = 26,\ f(12) = 12,\ f(2008) = 2008$ và $f(x)$ chia cho $x - 1$ được dư là $b + c + d + e + 26122007$ .Tìm hệ số a và $f(5)$

(Trích đề thi HSG MTCT Vũng Tàu THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Nhắc lại: Dư của phép chia của đa thức $f(x)$ cho $(x - a)$ là $f(a)$

Ta có: $f(1) = a + b + c + d + e + 26122008 = b + c + d + e + 26122007 \Rightarrow a = 1$

Suy ra $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 26122008$

Xét $g(x) = f(x) - x$, ta có: $g(x)$ là đa thức bậc 5, hệ số của x^5 là 1, thỏa mãn $g(6) = 0,\ g(26) = 0,\ g(12) = 0,\ g(2008) = 0$

Suy ra $g(x) = (x - 6)(x - 12)(x - 26)(x - 2008)(x - m)$

Thay x = 0 vào f(x), ta được: f(0)=26122008 suy ra $g(0) = f(0) - 0 = 26122008$

Suy ra $g(0) = (-6)(-12)(-26)(-2008)(-m) = 26122008 \Rightarrow m = -\dfrac{26122008}{6.12.26.2008}$

Dùng máy tính rút gọn ta được: $m = -\dfrac{1088417}{156624}$

Suy ra $g(x) = (x - 6)(x - 12)(x - 26)(x - 2008)\left(x + \dfrac{1088417}{156624}\right)$

Suy ra $f(x)=(x-6)(x-12)(x-26)(x-2008)\left(x+\frac{1088417}{156624}\right)+x$

Ghi vào màn hình: $(X-6)(X-12)(X-26)(X-2008)\left(X+\frac{1088417}{156624}\right)+X$

Bấm CALC, nhập giá trị 5 cho X, bấm = ta được 3518349,735

Thực hiện phép tính: Ans - 3518349,73 ta được $5,27042\times10^{-3}$

Suy ra f(5)=3518349,73527042

Vậy $a=1$ và f(5)=3518349,73527042.

Ví dụ 5. Cho đa thức $P(x)=4x^3+(m+n)x^2-(m+4n)x+2$. Tìm các giá trị của m, n biết $P(x)$ chia hết cho $(2x-1)^2$.

Hướng dẫn thực hành

Đặt $\begin{cases}a=m+n\\b=m+4n\end{cases}$

Khi đó: $P(x)=4x^3+ax^2-bx+2$

Suy ra $P'(x)=12x^2+2ax-b$

Ta có: $P(x)$ chia hết cho $(2x-1)^2$ nên

$$\begin{cases}P(\frac{1}{2})=0\\P'(\frac{1}{2})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}+\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b=0\\3+a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b=-\frac{5}{2}\\a-b=-3\end{cases}(*)$$

Dùng máy tính giải hệ (*) ta được a = 4; b = 7

Suy ra $\begin{cases}m+n=4\\m+4n=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=3\\n=1\end{cases}$

Vậy $m=3$; $n=1$

Ví dụ 6. Cho đa thức $P(x)=6x^3+ax^2+bx+c$. Xác định a,b,c biết rằng chia đa thức $P(x)$ cho các đa thức x^2-4 và $x+1$ được dư lần lượt là $36x+2112$ và 2016.

(Trích đề thi HSGMT Vũng Tàu, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

Ta có: $P(x)$ chia cho đa thức x^2-4 dư $36x+2112$

nên $P(x)=Q(x)(x^2-4)+36x+2112$

suy ra $\begin{cases}P(2)=48+4a+2b+c=2184\\P(-2)=-48+4a-2b+c=2040\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+2b+c=2136\\4a-2b+c=2088\end{cases}$

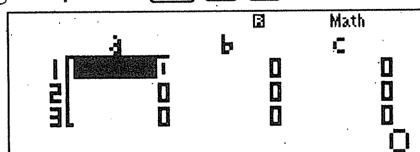
Mặt khác $P(x)$ chia cho đa thức $x+1$ dư 2016

nên $P(-1) = -6 + a - b + c = 2016 \Rightarrow a - b + c = 2022$

Ta có hệ: $\begin{cases} 4a + 2b + c = 2136 \\ 4a - 2b + c = 2088 \; (*) \\ a - b + c = 2022 \end{cases}$

Dùng chương trình cài sẵn trên máy để giải (*)

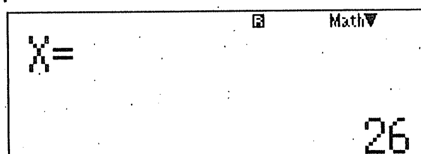
Chọn chương trình giải hệ 3 ẩn: MODE 5 2



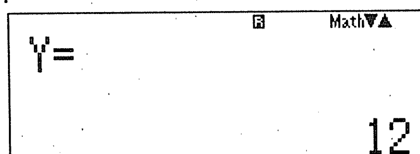
Nhập hệ số của hệ:

4 = 2 = 1 = 2 1 3 6 = 4 = − 2 = 1 = 2 0 8 8 = 1 = − 1 = 1 = 2 0 2 2 =

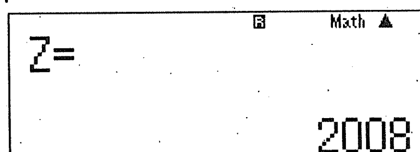
Bấm = ta có giá trị của a là 26



Bấm = ta có giá trị của b là 12



Bấm = ta có giá trị của c là 2008



Vậy $a = 26$, $b = 12$, $c = 2008$.

Ví dụ 7. Cho $f(1) = 1$, $f(m+n) = f(m) + f(n) + mn$ (với m, n nguyên dương)

Tính f(10); f(2007); f(2008) và f(2009), $f(2015)$.

Hướng dẫn thực hành

Ta có: $f(k) = f[(k-1)+1] = f(k-1) + f(1) + k - 1 = f(k-1) + k$

Do đó: $f(k) - f(k-1) = k \;(*)$

Áp dụng đẳng thức (*), ta được:

$f(2)-f(1)=2$
$f(3)-f(2)=3$
$f(4)-f(3)=4$
.....
$f(n-1)-f(n-2)=n-1$
$f(n)-f(n-1)=n$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$f(n)-f(1)=2+3+4+...+n-1+n$

$\Rightarrow f(n)=1+2+3+4+...+n-1+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Ghi vào màn hình: $\dfrac{A(A+1)}{2}$

Bấm CALC, nhập giá trị 10 cho A, bấm = ta được f(10) là 55

Bấm CALC, nhập giá trị 2007 cho A, bấm = ta được f(2007) là 2015028

Bấm CALC, nhập giá trị 2008 cho A, bấm = ta được f(2008) là 2017036

Bấm CALC, nhập giá trị 2009 cho A, bấm = ta được f(2009) là 2019045.

Bấm CALC, nhập giá trị 2015 cho A, bấm = ta được f(2015) là 2031120.

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq \{0;1\}$ thỏa mãn:

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x-1}\right)=x \quad (*).$$

Tính $f(2015)$.

Hướng dẫn thực hành

Đặt $x_1=\dfrac{1}{1-x}$. Lúc đó: $(*)\Leftrightarrow f(x)+f(x_1)=x$ (1)

Đặt $x_2=\dfrac{1}{1-x_1}$. Lúc đó: $(*)\Leftrightarrow f(x_1)+f(x_2)=x_1$ (2)

Đặt $x_3=\dfrac{1}{1-x_2}$. Lúc đó: $(*)\Leftrightarrow f(x_2)+f(x)=x_2$ (3)

Lấy: $(1)-(2)+(3)$ ta được: $f(x)=\dfrac{x-x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{x-1}{x}\right)$

Do đó: $f(a)=\dfrac{1}{2}\left(2015-\dfrac{1}{1-2015}+\dfrac{2015-1}{2015}\right)=1008$

Ví dụ 9. Cho đa thức $P(x)=x^5+x^2+1$ có 5 nghiệm là x_1,x_2,x_3,x_4,x_5. Kí hiệu $Q(x)=x^2-81$. Tính $Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)$.

Lời giải và đáp số

Ta có: $P(x)=x^5+x^2+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$

Ta có

$$\begin{aligned}
&Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)\\
&=(x_1^2-81)(x_2^2-81)(x_3^2-81)(x_4^2-81)(x_5^2-81)\\
&=(x_1-9)(x_1+9)(x_2-9)(x_2+9)(x_3-9)(x_3+9)(x_4-9)(x_4+9)(x_5-9)(x_5+9)\\
&=-(9-x_1)(9-x_2)(9-x_3)(9-x_4)(9-x_5)\\
&\qquad-(-9-x_1)(-9-x_2)(-9-x_3)(-9-x_4)(-9-x_5)\\
&=(9-x_1)(9-x_2)(9-x_3)(9-x_4)(9-x_5)(-9-x_1)(-9-x_2)(-9-x_3)\\
&\quad(-9-x_4)(-9-x_5)\\
&=P(9)P(-9)=-3486777677
\end{aligned}$$

Ví dụ 10. Cho đa thức $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+dx+e$.

Biết $P(1)=3, P(2)=9, P(3)=19, P(4)=33, P(5)=51$.

Tính giá trị đúng của $P(6), P(7), P(8), P(9), P(10), P(2013)$.

(Trích đề thi HSG MTCT Huế 2013-2014)

Lời giải và đáp số

Ta viết lại

$$\begin{aligned}
P(x)=&(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+a'(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+\\
&b'(x-1)(x-2)(x-3)+c'(x-1)(x-2)+d'(x-1)+e'
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&P(1)=3 \Leftrightarrow e'=3\\
&P(2)=9 \Leftrightarrow d'+e'=9 \Leftrightarrow d'=6\\
&P(3)=19 \Leftrightarrow 2c'+2d'+e'=19 \Leftrightarrow c'=2\\
&P(4)=33 \Leftrightarrow 6b'+6c'+3d'+e'=33 \Leftrightarrow b'=0\\
&P(5)=51 \Leftrightarrow 24a'+24b'+12c'+4d'+e'=51 \Leftrightarrow a'=0
\end{aligned}$$

Vậy $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+2(x-1)(x-2)+6(x-1)+3$

Nhập vào màn hình:

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+2(x-1)(x-2)+6(x-1)+3$

Ấn [CALC] nhập các giá trị x tương ứng ta được

$P(7)=819, P(8)=2649, P(9)=6883, P(10)=15321,$

$P(2013)=32807999505207237 9$

Ví dụ 11. Cho $P(x)=x^3+ax^2+bx-1$

a) Xác định số hữu tỉ a và b để $x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ là nghiệm của $P(x)$

b) Với giá trị a, b tìm được hãy tìm các nghiệm còn lại của P(x).

Lời giải và đáp số

a) Ta có $x=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=6-\sqrt{35}\Rightarrow$

$b=\dfrac{1}{x}-x^2-ax\Leftrightarrow b=6+\sqrt{35}-\left(6-\sqrt{35}\right)^2-a\left(6-\sqrt{35}\right)$

$\Leftrightarrow(a+13)=b+6a+65=0\Leftrightarrow a=-13, b=13$

Vậy $P(x)=x^3-13x^2+13x-1$

b) $P(x)=x^3-13x^2+13x-1\Leftrightarrow\ x=1\ ;\ x\approx 0{,}08392\ ,\ x\approx 11{,}916$

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Cho $P(x)=6x^3-7x^2-16x+m$. Với điều kiện nào của m để $P(x)$ chia hết cho $2x+3$.

Lời giải và đáp số

Ta có $P(x)=Q(x)(2x+3)\ (*)$.

Khi $x=-\dfrac{3}{2}$ thì $(*)\Leftrightarrow P\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow m=12$.

BT 2. Biết $x\in\mathbb{Z}$. Tìm số dư trong phép chia $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+1999$ cho $x^2+8x+12$.

Lời giải và đáp số

Cách 1

Ta có

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)(x+7)$$
$$=\left(x^2+8x+7\right)\left(x^2+8x+15\right)$$

Đặt $t=x^2+8x+7$. Lúc đó

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+1999=t(t+8)+1999=t^2+8t+1999$$
$$=\left(t^2+8t+15\right)+1984=(t+3)(t+5)+1984$$
$$=\left(x^2+8x+10\right)\underbrace{\left(x^2+8x+12\right)}_{\vdots x^2+8x+12}+1984$$

Do đó: $r=1984$.

Cách 2

Đặt $P(x)=(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+1999$

Gọi $P(x)=Q(x)\left(x^2+8x+12\right)+ax+b=Q(x)(x+2)(x+6)+ax+b$

Ta có: $\begin{cases} P(-2) = -2a + b = 1984 \\ P(-6) = -6a + b = 1984 \end{cases}$.

Vậy $r = 1984$.

BT 3. Tìm số dư trong phép chia: $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho $x^2 - 1$.

Lời giải và đáp số

Cách 1: Đặt $P(x) = Q(x)(x^2 - 1) + ax + b$

Ta có: $\begin{cases} P(-1) = -a + b = -4 \\ P(1) = a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow r(x) = 4x.$

Cách 2:

$$x^{27} + x^9 + x^3 + x = x^{27} - x + x^9 - x + x^3 - x + 4x$$
$$= x(x^{26} - 1) + x(x^8 - 1) + x(x^2 - 1) + 4x$$
$$\Rightarrow r(x) = 4x.$$

BT 4. Tìm các giá trị a, b, c sao cho $P(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $x + 2$ và chia cho $x^2 - 1$ dư x.

Lời giải và đáp số

Ta có $f(-2) = 0 \Leftrightarrow 4a - 2b + c = -32$.

Mặt khác: $f(x) = P(x)(x-1)(x+1) + x$

Suy ra: $\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c + 2 = -1 \\ a + b + c + 2 = 1 \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được: $a = -\dfrac{28}{3}$; $b = 1$; $c = \dfrac{22}{3}$.

BT 5. Cho đa thức $f(x)$ khi chia cho $x - 2$ thì dư 5, khi chia cho $x - 3$ thì dư 7, còn khi chia $(x-2)(x-3)$ thì được thương là $1 - x^2$ và còn dư. Tìm đa thức $f(x)$

Lời giải và đáp số

Ta có

$$f(x) = A(x)(x-2) + 5 \quad (1)$$
$$f(x) = B(x)(x-3) + 7 \quad (2)$$
$$f(x) = (x-2)(x-3)(1-x^2) + ax + b \quad (3)$$

Theo đề ta được: $f(2) = 5$ thay vào (3) ta được: $2a + b = 5$

$f(3) = 7$ thay vào (3) ta được: $3a + b = 7$

Giải hệ: $\begin{cases} 2a+b=5 \\ 3a+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Do đó: $f(x)=(x-2)(x-3)(1-x^2)+2x+1=-x^4+5x^3-5x^2-5x+6.$

BT 6. Xác định các hệ số a,b sao cho đa thức $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ chia hết cho x^2-x+b.

Lời giải và đáp số

Cách 1: Đồng nhất thức

$$6x^4-7x^3+ax^2+3x+2=(x^2-x+b)(cx^2+dx+e)$$
$$\Leftrightarrow 6x^4-7x^3+ax^2+3x+2=cx^4+(d-c)x^3+(bc+e-d)x^2+(bd-e)x+be$$

Đồng nhất hệ số ta được: $a=-7,\ b=-1,\ a=-12,\ b=-12$.

Cách 2: Dùng phép chia:

$$64x^4-7x^3+ax^2+3x+2$$
$$=(x^2-x+b)(6x^2-x+a-6b-1)+(a-5b+2)x+6b^2-ab+b+2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-5b+2=0 \\ 6b^2-ab+b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-7 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-12 \\ b=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

BT 7. Cho $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$.

Biết $P(1)=5,\ P(2)=7,\ P(3)=9,\ P(4)=11$. Tính $P(10),\ P(11),\ P(12),\ P(13)$

Lời giải và đáp số

Cách 1: Thay $P(1)=5,\ P(2)=7,\ P(3)=9,\ P(4)=11$ ta được hệ phương trình.

Giải hệ này ta được: $a=-10, b=35,\ c=-48,\ d=37$.

Cách 2: Sử dụng công thức Nội suy Newton

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+\alpha_1(x-1)(x-2)(x-3)+\alpha_2(x-1)(x-2)$$
$$+\alpha_3(x-1)+\alpha_4$$

Với

$x=1\Rightarrow \alpha_4=5;\ x=2\Rightarrow \alpha_3=2$
$x=3\Rightarrow \alpha_2=0;\ x=4\Rightarrow \alpha_1=0$

Vậy

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2(x-1)+5$$
$$=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2x+3$$

Cách 3: Tìm quy luật giá trị

Ta có

$$\left.\begin{array}{l}5=2.1+3\\7=2.2+3\\9=2.3+3\\11=2.4+3\end{array}\right\}\Rightarrow 5,\ 7,\ 9,\ 11 \text{ là các giá trị của } 2x+3 \text{ khi } x \text{ chạy từ 1 đến 4.}$$

Đặt $Q(x)=P(x)-(2x+3)$

Ta có $Q(1)=P(1)-(2.1+3)=0=Q(2)=Q(3)=Q(4)$

Suy ra: $Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Do đó: $P(x)=Q(x)+2x+3=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2x+3$

Đáp số: $P(10)=5067,\ P(11)=5065,\ P(12)=7947,\ P(13)=11909$

BT 8. Cho đa thức $P(x)=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ có giá trị là $3, 0, 3, 12, 27, 48$ khi x lần lượt là $1, 2, 3, 4, 5, 6$

a) Xác định a, b, c, d, e, f.

b) Tính $P(11), P(15), P(20)$.

Lời giải và đáp số

Ta thử tìm một đa thức $Q(x)$ nào đó để:

$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)+Q(x)$

Thử xét $Q(x)=ax^2+bx+c$

Ta có

$$\left.\begin{array}{l}P(1)=Q(1)=3=a+b+c\\P(2)=Q(2)=0=4a+2b+c\\P(3)=Q(3)=3=9a+3b+c\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-12\\c=12\end{cases}$$

$\Rightarrow Q(x)=3x^2-12x+12$. Thử lại với $P(4)=12,\ P(5)=27,\ P(6)=48$

$P(11)=151443;\ P(15)=2162667;\ P(20)=19536012$.

BT 9. Cho đa thức $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ thỏa mãn

$$P(0)=12,\ P(1)=12,\ P(2)=0,\ P(4)=60.$$

a) Xác định a, b, c, d.

b) Tính chính xác $P(2006)$

c) Tìm số dư trong phép chia $P(x)$ cho $5x-6$.

Lời giải và đáp số

a) Dễ dàng tìm được $a=-2;\ b=-7;\ c=8;\ d=12$.

b) Lúc đó:

$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 = 8x + 12 = (x+2)(x-3)(x-2)(x+1)$

$P(2006) = 2008.(2003.2004.2007) = 2008.8056122084$

Để thực hiện phép nhân này ta phải:

$2008 \times (805610000 + 22084) = 2008 \times 80561 \times 10^5 + 2008 \times 22084$

$= 161766488 \times 10^5 + 44344672$

$\Rightarrow P(2006) = 16176693144672$

c) $r = \dfrac{6336}{625} = 10,1376.$

BT 10. Cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Biết $P(1) = 27; P(2) = 125; P(3) = 343; P(4) = 735$

a) Tìm đa thức $P(x)$

b) Tính $P(-1); P(6); P(15); P(2006)$

c) Tìm số dư của phép chia $P(x)$ cho $3x - 5$.

Lời giải và đáp số

a) **Cách 1:** Giải hệ phương trình ta tìm được a, b, c, d

Cách 2: Ta thấy

$P(1) = 27 = (2.1+1)^3 = 27$

$P(2) = (2.2+1)^3 = 125$

$P(3) = (2.3+1)^3 = 347$

Suy ra đa thức $P(x) - (2x+1)^3 = 0$ có các nghiệm là $x = 1, 2, 3$

Xét $P(x) - (2x+1)^3 = k(x-1)(x-2)(x-3)$

Theo giả thiết: $P(4) = 735 \Leftrightarrow 6k + 9^3 = 739 \Leftrightarrow k = 1$

Vậy $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + (2x+1)^3 = 9x^3 + 6x^2 + 17x - 5$

b) Ta tính được: $P(-1) = 25, P(6) = 22575, P(15) = 31975$

Tính: $P(2006)$

Tính $9 \times 2006^3 = 7,264994594 \times 10^{10}$ ấn $\boxed{-}$ 7×10^{10} ta được kết quả 2649945944

Do đó: $9 \times 2006^3 = 72649945944$

$6\times 2006^3 = 24144216;\ 17\times 2006 - 5 = 34097$

Cộng các kết quả lại ta được $P(2006) = 72694124257$

c) $r = \dfrac{245}{3}$.

BT 11. Tìm đa thức bậc ba $P(x)$ biết $P(0) = 110; P(1) = 12; P(2) = 4; P(3) = 1$

Tính chính xác $P(2008)$.

Lời giải và đáp số

Dễ dàng tìm được $P(x) = 2{,}5x^3 - 12{,}5x^2 + 12x + 10$

Để tính $P(2008)$ ta làm 1 trong 2 cách sau:

Cách 1:

$$\begin{aligned} P(2008) &= 2{,}5\times 2008^3 - 12{,}5\times 2008^2 + 12\times 2008 + 10 \\ &= 2008\left(2{,}5\times 2008^2 - 12{,}5\times 2008 + 12\right) + 10 \\ &= 2008\left(10050000 + 5072\right) + 10 = 20190584586 \end{aligned}$$

Cách 2: $P(2008) = 2{,}019058459\times 10^{10}$ ấn $\boxed{-}$ $2\times 10^{10} = 190584586$

Vậy $P(2008) = 20190584586$

BT 12. Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Biết $P(1) = 2, P(2) = 9, P(3) = 22, P(4) = 41, P(5) = 66$. Tính $P(2007)$.

Lời giải và đáp số

Ta dễ dàng tìm được: $P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 222x^2 + 272x - 119$

Dùng máy tính : $P(2007) = 3{,}232124233\times 10^{16}$

Muốn tính chính xác giá trị của $P(2007)$ ta làm như sau:

$\boxed{-}3\boxed{\times}10^{16}\boxed{=}$ $\left(2{,}321242334\times 10^{15}\right)$

$\boxed{-}2\boxed{\times}10^{15}\boxed{=}$ $\left(3{,}212423342\times 10^{14}\right)$

$\boxed{-}3\boxed{\times}10^{14}\boxed{=}$ $\left(2{,}124233417\times 10^{13}\right)$

$\boxed{-}2\boxed{\times}10^{13}\boxed{=}$ $\left(1{,}242334169\times 10^{12}\right)$

$\boxed{-}1\boxed{\times}10^{12}\boxed{=}$ $\left(2{,}423341689\times 10^{11}\right)$

$\boxed{-}2\boxed{\times}10^{11}\boxed{=}$ $\left(4{,}233416885\times 10^{10}\right)$

$\boxed{-}4\boxed{\times}10^{10}\boxed{=}$ $\left(2334168854\right)$

Vậy $P(2007) = 32321242334168854$

BT 13. Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, biết $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(5) = 25$. Tính $P(1601)$, $P(2009)$.

Hướng dẫn thực hành

Ta có: $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(5) = 25$ nên ta có hệ: $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2^2 a + 2b + c = 4 - 2^3 \\ 5^2 a + 5b + c = 25 - 5^3 \end{cases}$ (I)

Chọn chương trình giải hệ 3 ẩn: [MODE] [5] [2]

Nhập các hệ số của (I):

[1] [=] [1] [=] [1] [=] [0] [=] [2] [x^2] [=] [2] [=] [1] [=] [4] [−] [2] [$x^■$] [3] [=] [5] [x^2] [=] [5] [=] [1] [=] [2] [5] [−] [5] [$x^■$] [3] [=]

Bấm [=] ta có giá trị của a là -7

Bấm [=] ta có giá trị của b là 17

Bấm [=] ta có giá trị của c là -10

Suy ra $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 10$

Bấm [MODE] [1] để trở về chương trình tính toán cơ bản

Ghi vào màn hình: $X^3 - 7X^2 + 17X - 10$

Bấm [CALC], nhập giá trị 1601 cho X, bấm [=] ta có giá trị của $P(1601)$ là 4085769601.

Bấm [CALC], nhập giá trị 2009 cho X, bấm [=] ta có giá trị của $P(2009)$ là 8080268305.

Vậy $P(1601) = 4085769601$; $P(2009) = 8080268305$

Ghi chú: Có thể tính giá trị của $P(x)$ theo $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x^2$

BT 14. Cho $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết $P(x)$ chia hết cho $x - 1$, chia $x^2 - 4$ dư x và P(3) =2009. Tính a, b, c, d.

Hướng dẫn thực hành

Ta có: $P(x)$ chia hết cho $x - 1$ nên $P(1) = a + b + c + d = 0$

$P(x)$ chia $x^2 - 4$ dư x nên $P(x) = (x^2 - 4)Q(x) + 4$

Suy ra: $\begin{cases} P(2) = 8a + 4b + 2c + d = 2 \\ P(-2) = -8a + 4b - 2c + d = -2 \end{cases}$

Mặ khác: P(3) =2009 nên $P(3) = 27a + 9b + 3c + d = 2009$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b + c + d = 0 & (1) \\ 8a + 4b + 2c + d = 2 & (2) \\ -8a + 4b - 2c + d = -2 & (3) \\ 27a + 9b + 3c + d = 2009 & (4) \end{cases}$

Từ vế theo vế (2), (3), (4) cho (1), ta được:

$$\Rightarrow \begin{cases} 7a+3b+c=2 \\ -9a+3b-3c=-2 \\ 26a+8b+2c=2009 \end{cases} \quad (*)$$

Chọn chương trình giải hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn: [MODE] [5] [2]

Nhập hệ số của (*):

[7] [=] [3] [=] [1] [=] [2] [=] [−] [9] [=] [3] [=] [−] [3] [=] [−] [2] [=] [2] [6] [=] [8] [=] [2] [=] [2] [0] [0] [9] [=]

Bấm [=], ta có giá trị của a là $\frac{6013}{30}$

Bấm [=], ta có giá trị của b là $-\frac{2001}{10}$

Bấm [=], ta có giá trị của c là $-\frac{12011}{15}$

Thay a,b,c vừa tìm được vào (1), ta có: $d=800,4$

Vậy $a=\frac{6013}{30}$; $b=-\frac{2001}{10}$; $c=-\frac{12011}{15}$; $d=800,4$

BT 15. Cho đa thức $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, biết

$P(1)=5,\ P(2)=11,\ P(3)=21,\ P(4)=35,\ P(5)=77$

a) Tính $P(20)$, $P(2009)$ (lấy kết quả chính xác)

b) Tìm số dư của phép chia $P(x)$ cho $3x-4$

Hướng dẫn thực hành

Đặt $Q(x)=2x^2+3$, ta có:

$Q(1)=5,\ Q(2)=11,\ Q(3)=21,\ Q(4)=35,\ Q(5)=77$

Suy ra $f(x)=P(x)-Q(x)$ thỏa $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0,\ f(5)=24$

Suy ra $f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Ta có: $f(5)=24$ nên $a=1$

Suy ra $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Suy ra $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+2x^2+3$

Ghi vào màn hình: $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)+2X^2+3$

Bấn [CALC], nhập giá trị của 20, bấm [=] ta có giá trị của P(20) =93827

Bấm [CALC], nhập giá trị của 2009, bấm [=] ta có giá trị $1,620901421\times10^{13}$

Ghi vào màn hình: Ans-$1,62090142\text{x}10^{13}$

Bấm [=] ta được 5845

Suy ra P(2009)=16209014205845

Bấm ▲, CALC, nhập giá trị của $\frac{4}{3}$, bấm [=] ta có giá trị của P($\frac{4}{3}$) là $\frac{451}{81}$.

Vậy số dư của phép chia $P(x)$ cho $3x-4$ là $\frac{451}{81}$.

BT 16. Cho đa thức $f(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+48168$

Biết $f(1)=1, f(2)=8, f(3)=27, f(4)=64$. Tính $f(7), f(8), f(9)$.

Hướng dẫn thực hành

Đặt $g(x)=x^3$, khi đó: $g(1)=1, g(2)=8, g(3)=27, g(4)=64$

Suy ra $h(x)=f(x)-g(x)$ là đa thức bậc 5 có hệ số ứng với x^5 là 1, hệ số tự do là 48168 và thỏa $h(1)=h(2)=h(3)=h(4)=0$

Suy ra $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-m)$

Suy ra $(-1)(-2)(-3)(-4)(-m)=48168 \Rightarrow m=-2007$

Do đó: $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x+2007)+x^3$

Ghi vào màn hình: $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X+2007)+X^3$

Bấm CALC, nhập giá trị 7 cho X, bấm [=] ta có giá trị của f(7) là 725383

Bấm CALC, nhập giá trị 8 cho X, bấm [=] ta có giá trị của f(8) là 1693112

Bấm CALC, nhập giá trị 9 cho X, bấm [=] ta có giá trị của f(9) là 3387609

Vậy f(7) = 725383; f(8) = 1693112; f(9) = 3387609

BT 17. Cho $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Biết $P(1)=10, P(2)=20, P(3)=30$

Tính: $A=\frac{P(12)+P(-8)}{10}+25$

Lời giải và đáp số

Đặt $g(x)=10x$, ta được: $g(1)=10, g(2)=20, g(3)=30$

Xét $h(x)=P(x)-g(x)$ thỏa $h(1)=h(2)=h(3)=0$

Suy ra $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x+m)$

$\Rightarrow P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x+m)+10x$

Suy ra

$$A = \frac{11.10.9.(12+m)+10.12-9.10.11.(-8+m)-8.10}{10}+25$$

$$= \frac{11.10.9.(12+8)+4.10}{10}+25$$

Dùng máy tính ta tính được giá trị của A là 2009

Vậy $A = \frac{f(12)+f(-8)}{10}+25 = 2009$

BT 18. Tìm a,b,c biết $a(x+2)^2 + b(x+3)^2 = cx+5, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải và đáp số

Ta có

$$a(x+2)^2 + b(x+3)^2 = cx+5 \Leftrightarrow (a+b)x^2 + (4a+6b)x + 4a + 9b = cx + 5$$

Theo hệ quả ta có:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+6b=c \\ 4a+9b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}.$$

BT19. Cho đa thức

$P(x) = x^7 - 10x^6 + 36x^5 - 52x^4 + 16x^3 + 2005x^2 - 7957x + 9964$ được viết dưới dạng:

$$P(x) = a_1(x-2)^7 + a_2(x-2)^6 + a_3(x-2)^5 + a_4(x-2)^4 + \\ + a_5(x-2)^3 + a_6(x-2)^2 + a_7(x-2) + a_8$$

Hãy xác định a_2, a_4, a_6, a_8.

Lời giải và đáp số

Viết đa thức

$P(x) = x^7 - 10x^6 + 36x^5 - 52x^4 + 16x^3 + 2005x^2 - 7957x + 9964$ dưới dạng lũy thừa của $x-2$.

Chia $P(x)$ cho $x-2$ ta được $P(x) = Q_1(x)(x-2) + 2006$, trong đó $Q_1(x) = x^6 - 8x^5 + 20x^4 - 12x^3 - 8x^2 + 1989x - 3979$.

lại chia $Q_1(x)$ cho $x-2$ theo sơ đồ Horner ta được:

$Q_1(x) = (x^5 - 6x + 8x^3 + 1989)(x-2) - 1$.

Thực hiện quy trình cho đến khi đa thức $Q_n(x)$ có bậc là 0. Các hệ số $Q_k(x)$ của các đa thức trung gian và có số dư cho trong bảng sau:

P(x)	1	-10	36	-52	16	2005	-7957	9964
2	1	-8	20	-12	-8	1989	-3979	$2006 = a_0$
2	1	-6	8	4	0	1989	$-1=a_7$	
2	1	-4	0	4	8	$2005=a_6$		
2	1	-2	-4	-4	$0 = a_5$			
2	1	0	-4	$-12 = a_4$				
2	1	2	$0 = a_3$					
2	1	$4 = a_2$						
2	$1=a_1$							

Các hệ số cuối cùng trong từng dòng chính là các số dư khi chia đa thức $Q_k(x)$ cho $x-2$, cũng chính là hệ số trong đa thức khi khai triển theo lũy thừa $x-2$

Cụ thể ta có:

$$P(x)=(x-2)\left(x^6-8x^5+20x^4-12x^3-8x^2+1989x-3979\right)+2006$$
$$=(x-2)\left[(x-2)\left(x^5-6x^4+8x^3+4x^2+1989\right)-1\right]+2006$$
$$=(x-2)^2\left(x^5-6x^4+8x^3+4x^2+1989\right)-(x-2)+2006$$
$$=(x-2)^2\left[(x-2)\left(x^4-4x^3+4x+8\right)+2005\right]-(x-2)+2006$$
$$=(x-2)^3\left(x^4-4x^3+4x+8\right)+2005(x-2)^2-(x-2)+2006$$
$$=(x-2)^3\left[(x-2)\left(x^3-2x^2+4x-4\right)\right]+2005(x-2)^2-(x-2)+2006$$
$$=(x-2)^4\left[(x-2)\left(x^2-4\right)-12\right]+2005(x-2)^2-(x-2)+2006$$
$$=(x-2)^5(x-2)(x+2)-12(x-2)^4+2005(x-2)^2-(x-2)+2006$$
$$=(x-2)^6(x+2)-12(x-2)^4+2005(x-2)^2-(x-2)+2006$$
$$=(x-2)^6(x-2+4)-12(x-2)^4+2005(x-2)^2-(x-2)+2006$$
$$=(x-2)^7+4(x-2)^6-12(x-2)^4+2005(x-2)^2-(x-2)+2006$$

Suy ra kết quả: $a_8=2006; a_6=2005; a_4=-12; a_2=4.$

BT 20. Cho P(x) là một đa thức bậc 6 sao cho

$P(1)=P(-1); P(2)=P(-2); P(3)=P(-3)$. Chứng minh rằng $P(x)=P(-x), \forall x$.

Lời giải và đáp số

Đặt $P(x)=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

với $a_6 \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,6}$

Xét đa thức $f(x)=P(x)-P(-x)$.

Lúc đó:

$f(x)=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0-a_6x^6+a_5x^5-a_4x^4$
$+a_3x^3-a_2x^2+a_1x-a_0$
$=2a_5x^5+2a_3x^3+2a_1x\Rightarrow \deg f(x)\le 5$

Ta có: $f(1)=P(1)-P(-1)=0$, $f(2)=P(2)-P(-2)=0$
$f(3)=P(3)-P(-3)=0$, $f(-1)=P(-1)-P(1)=0$
$f(-2)=P(-2)-P(2)=0$, $f(-3)=P(-3)-P(3)=0$

Đa thức $f(x)$ có bậc bé hơn hoặc bằng 5 và có 6 nghiệm số. Do đó $f(x)\equiv 0$.

Vậy $P(x)=P(-x),\forall x$

Cách 2: Đặt $P(x)=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

với $a_6\ne 0,\ a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,6}$

Theo đề ta có:

$\begin{cases}P(-1)=P(1)\\P(-2)=P(2)\\P(-3)=P(3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_5=0\\a_3=0\\a_1=0\end{cases}$. Do đó: $P(x)=a_6x^6+a_4x^4+a_2x^2+a_0$

Rõ ràng: $P(-x)=P(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Chú ý:

- Nếu $f(x)$ có bậc không qua n và có quá n nghiệm thì $f(x)$ là đa thức 0.
- Cho $f(x)$ có bậc bằng 2n thỏa $f(-k)=f(k)$, $1\le k\le n$ thì $f(x)=f(-x)$

thức là hàm đa thức là hàm chẵn.

BT 21. Tìm đa thức theo x có bậc bé nhất với các hệ số nguyên, biết một nghiệm là $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $a=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\Rightarrow a^2=2+2\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$, $a^3=2\sqrt{2}+6\sqrt[3]{3}+3\sqrt{2}.\sqrt[3]{9}+3$ (*)

$\sqrt[3]{3}=a-\sqrt{2}$,

Từ đó: $\sqrt[3]{9}=a^2-2-2\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}=a^2-2-2\sqrt{2}\left(a-\sqrt{2}\right)=a^2-2\sqrt{2}a+2$

Thay vào (*) ta có:

$a^3=2\sqrt{2}+6\left(a-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}\left(a^2-2\sqrt{2}a+2\right)+3\Leftrightarrow a^3+6a-3=\sqrt{2}\left(3a^2+2\right)$

Bình phương hai vế:

$a^6+36a^2+9+12a^4-6a^3-36a=2\left(9a^4+12a^2+4\right)$

$\Leftrightarrow a^6-6a^4-6a^3+12a^2-36a+1=0$

Bằng phép đồng nhất hệ số, ta chứng minh đa thức trên không phân tích được thành tích hai đa thức bậc thấp hơn có hệ số nguyên, nên đa thức trên chính là đa thức có bậc bé nhất thỏa mãn đề bài.

Chủ đề 6:
LÃI SUẤT NGÂN HÀNG VÀ BÀI TOÁN TĂNG TRƯỞNG

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1. Lãi đơn: Lãi được tính theo tỉ lệ phần trăm trong một khoảng thời gian cố định trước.

Ví dụ: Khi gởi 1 000 000đ vào ngân hàng với lãi suất là 5%/năm thì sau một năm ta nhận ***số tiền lãi*** là : 1 000 000 x 5% = 50 000đ.

Số tiền lãi này như nhau được cộng vào hàng năm. Kiểu tính lãi này được gọi là lãi đơn. Như vậy sau hai năm số tiền cả gốc lẫn lãi là

1 000 000 + 2 x 50 000 = 1 100 000đ.

Nếu gửi sau n năm thì sẽ nhận số tiền cả gốc lẫn lãi là : 1 000 000 + 50 000n đ.

Kiểu tính lãi này không khuyến khích người gởi, bởi vì khi ta cần rút tiền ra. Ví dụ ta gởi 1 000 000 đ với lãi suất 5%/năm, sau 18 tháng (1,5 năm) ta vẫn chỉ được tính lãi một năm đầu và ***tổng số tiền rút ra*** chỉ là 1 000 000 + 50 000 = 1 050 000đ. Vì vậy các ngân hàng thường tính chu kỳ lãi suất ngắn hơn, có thể tính theo tháng.

Nếu lãi suất 0,4166%/tháng thì cuối tháng đầu chúng ta sẽ có **số tiền lãi** từ một triệu đồng là 1 000 000 x 0,4166 % = 4 166đ. Và sau một **năm tổng số tiền lãi** là: 4166x 12 = 50 000 đ. Như vậy, với lãi đơn, không có sai khác gì nếu ta nhận lãi theo tròn năm hay theo từng tháng. Tuy nhiên, nếu ta rút tiền ra giữa chừng, ví dụ sau 18 tháng thì ta sẽ được số tiền lãi là 4166 x 18 = 75 000đ. Do đó **tiền lãi sẽ nhiều hơn so với tính lãi theo năm.**

2. Lãi kép: Sau một đơn vị thời gian lãi được gộp vào vốn và được tính lãi. Loại lãi này được gọi là lãi kép.

Ví dụ: Khi gửi 1 000 000đ với lãi suất 5%/năm thì sau một năm ta vẫn nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là 1 050 000đ. Toàn bộ số tiền này được gọi là gốc và tổng số tiền cuối năm thứ hai sẽ là :

1 050 000 + 1 050 000 x 5% = 1 102 500đ

Gọi x_n là số tiền nhận được cuối năm n thì với $x_0 = 1000000 = 10^6$ đ

Sau năm thứ nhất ta nhận được :

$$x_1 = 10^6 + 10^6 \times 5\% = 10^6(1+5\%) = 10^6 \times 1{,}05 = 1050000 \text{ đ}$$

Sau năm thứ hai ta nhận được:

$$x_2 = x_1 + x_1 \times 5\% = x_1(1+5\%) = x_0(1+5\%)^2 \text{ đ}$$

Sau năn thứ ba ta nhận được:

$$x_3 = x_2 + x_2 \times 5\% = x_2(1+5\%) = x_0(1+5\%)^3 \text{ đ}$$

Sau năm thứ n ta nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi là:

$$x_{n+1} = (1+5\%)x_n = 1{,}05x_n$$

Phương trình này chính là phương trình sai phân tuyến tính bậc nhất:

$x_{n+1} = qx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

II. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Bài toán1: Gửi vào ngân hàng số tiền là a đồng, với lãi suất hàng tháng là r% trong n tháng. Tính cả vốn lẫn lãi T sau n tháng?

Phương pháp

Gọi A là tiền vốn lẫn lãi sau n tháng ta có:

Tháng 1 (n = 1): $A = a + ar = a(1+r)$

Tháng 2 (n = 2): $A = a(1+r) + a(1+r).r = a(1+r)^2$

…………………

Tháng n (n = n): $A = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-1}.r = a(1+r)^n$

Vậy $T = a(1+r)^n$ (*)

Trong đó: a tiền vốn ban đầu, r lãi suất (%) hàng tháng, n số tháng, A tiền vốn lẫn lãi sau n tháng.

Từ công thức $T = a(1+r)^n$ ta tính được các đại lượng khác như sau:

1) $n = \log_{(1+r)}\dfrac{T}{a} = \dfrac{\ln\dfrac{T}{a}}{\ln(1+r)}$; 2) $r = \sqrt[n]{\dfrac{T}{a}} - 1$; 3) $a = \dfrac{T}{(1+r)^n}$.

Ta dễ dàng chứng minh các công thức như sau:

1) Lấy logarit nepe hai vế của (*) ta được:

$$\ln T = \ln\left[a(1+r)^n\right] = \ln a + n\ln(1+r) \Leftrightarrow \frac{\ln T}{\ln a} = n\ln(1+r) \Leftrightarrow n = \frac{\dfrac{\ln T}{\ln a}}{\ln(1+r)}$$

2) Từ $T = a(1+r)^n \Leftrightarrow \dfrac{T}{a} = (1+r)^n \Leftrightarrow 1 + r = \sqrt[n]{\dfrac{T}{a}} \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\dfrac{T}{a}} - 1$.

3) Từ $T = a(1+r)^n \Rightarrow a = \dfrac{T}{(1+r)^n}$.

Ví dụ 1. Một số tiền 58 000 000 đ gửi tiết kiệm theo lãi suất 0,7% tháng. Tính cả vốn lẫn lãi sau 8 tháng?

Lời giải và đáp số

Ta có: T = 58 000 000(1 + 0,7%)^8

Nhập vào màn hình

5 8 0 0 0 0 0 0 × (1 + 0 . 7 SHIFT ((%)) $x^■$ 8

Ấn [=] ta được kết quả 61 328 699, 87 {Sáu mươi mốt triệu, ba trăm hai mươi tám ngàn, sáu trăm chín mươi chín đồng}

```
58000000×(1+0.7▷
         61328699.87
```

Ví dụ 2. Một người có 58 000 000đ muốn gửi vào ngân hàng để được 70 021 000đ. Hỏi phải gởi tiết kiệm bao lâu với lãi suất là 0,7% tháng?

Lời giải và đáp số

Số tháng tối thiểu phải gửi là: $n = \dfrac{\ln\dfrac{70021000}{58000000}}{\ln\left(1+0,7\%\right)}$

Qui trình bấm phím

[▭/▭] [ln] [▭/▭] [7] [0] [0] [2] [1] [0] [0] [0] [▶] [5] [8] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [▶] [)] [▼] [ln] [1] [+] [0] [.] [7] [SHIFT] [(] (%) [)] [=]

Ta được kết quả: 27,00152182 tháng.

```
ln(70021000/58000000)
     ln(1+0.7%)
         27.00152182
```

Vậy tối thiểu phải gửi là 27 tháng.

Chú ý:

- Nếu không cho phép làm tròn, thì ứng với kết quả trên số tháng tối thiểu là 28 tháng.
- Ngoài ra ta có thể tính dựa vào công thức

$n = \log_{(1+r)}\dfrac{T}{a} = \log_{(1+0,7\%)}\dfrac{70021000}{58000000}$ bằng cách ấn phím như sau:

[log▫▫] [(] [1] [+] [0] [.] [7] [SHIFT] [(] [)] [▶] [▭/▭] [7] [0] [0] [2] [1] [0] [0] [0] [▼] [5] [8] [0] [0] [0] [0] [0] [0]

Ấn [=] ta được kết quả

```
log(1+0.7%)(70C/58C▷
         27.00152182
```

Ví dụ 3. Số tiền 58 000 000đ gởi tiết kiệm trong 8 tháng thì lãnh về được 61 329 000đ. Tìm lãi suất hàng tháng?

Lời giải và đáp số

Lãi suất hàng tháng: $r=\sqrt[8]{\dfrac{61329000}{58000000}}-1$

Qui trình bấm phím:

[SHIFT] [$x^{■}$] [8] [►] [$\frac{■}{■}$] [6] [1] [3] [2] [9] [0] [0] [0] [▼] [5] [8] [0] [0] [0] [0] [0]
[0] [►] [►] [−] [1]

Ấn [=] ta được kết quả: 0,7%.

Ví dụ 4. Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng trong thời gian 10 năm với lãi suất 5% một năm. Hỏi rằng người đó nhận được số tiền nhiều hơn hay ít hơn bao nhiêu nếu ngân hàng trả lãi suất $\frac{5}{12}$% một tháng.

Lời giải và đáp số

Gọi số a là tiền gửi tiết kiệm ban đầu, r là lãi suất, sau 1 tháng sẽ là: $a(1+r)$

Sau n tháng số tiền cả gốc lãi là: $T=a(1+r)^n$

Số tiền sau 10 năm với lãi suất 5% một năm:

$$10\,000\,000(1+5\%)^{10}=16288946{,}27 \text{ đ}$$

Số tiền nhận sau 10 năm (120 tháng) với lãi suất 5/12% một tháng:

$$10000000(1+\frac{5}{12}\%)^{120}=16\,470\,094{,}98 \text{ đ}$$

$\Rightarrow$ số tiền gửi theo lãi suất $\frac{5}{12}$% một tháng nhiều hơn: 1811486,7069 đ.

Ví dụ 5. Lãi suất của tiền gửi tiết kiệm của một số ngân hàng thời gian vừa qua liên tục thay đổi. Bạn Châu gửi số tiền ban đầu là 5 triệu đồng với lãi suất 0,7% tháng. Chưa đầy một năm, thì lãi suất tăng lên 1,15% tháng trong nửa năm tiếp theo và bạn Châu tiếp tục gửi; sau nửa năm đó lãi suất giảm xuống còn 0,9% tháng, bạn Châu tiếp tục gửi thêm một số tháng tròn nữa, khi rút tiền bạn Châu được cả vốn lẫn lãi là 5 747 478,359 đồng (chưa làm tròn). Hỏi bạn Châu đã gửi tiền tiết kiệm trong bao nhiêu tháng ? Nêu sơ lược quy trình bấm phím trên máy tính để giải.

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2010)

Lời giải và đáp số

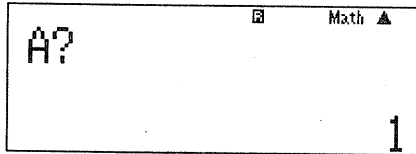
Gọi a là số tháng gửi với lãi suất 0,7% tháng, x là số tháng gửi với lãi suất 0,9% tháng, thì số tháng gửi tiết kiệm là: a + 6 + x. Khi đó, số tiền gửi cả vốn lẫn lãi là:

$$5\,000\,000\times 1{,}007^{a}\times 1{,}0115^{6}\times 1{,}009^{x}=5\,747\,478{,}359.$$

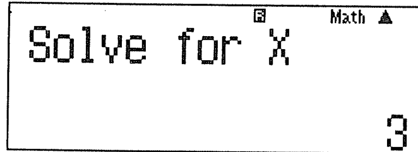
Quy trình bấm phím

[5] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [×] [1] [.] [0] [0] [7] [$x^{■}$] [ALPHA] [(−)] [►] [×] [1] [.] [0]
[1] [1] [5] [$x^{■}$] [6] [►] [×] [1] [.] [0] [0] [9] [$x^{■}$] [ALPHA] [)] [►] [−] [5] [7] [4] [7] [4]
[7] [8] [.] [3] [5] [9] [ALPHA] [CALC] [0]

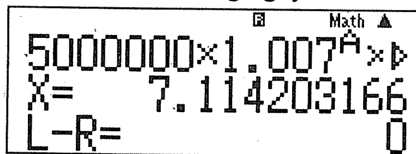
Ấn SHIFT CALC (SOLVE). Máy yêu cầu nhập giá trị A:



Ấn 1 =. Máy yêu cầu nhập giá trị X .



Ấn 1 = Ta được kết quả của X không nguyên



Lặp lại quy trình với A nhập vào lần lượt là 2, 3, 4, 5, ...đến khi nhận được giá trị nguyên của X = 4 khi A = 5.

Vậy số tháng bạn Châu gửi tiết kiệm là: 5 + 6 + 4 = 15 tháng.

Bài toán 2. Một người, hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là a (đồng). Biết lãi suất hàng tháng là m%. Hỏi sau n tháng, người ấy có bao nhiêu tiền?

Lời giải

Cuối tháng thứ I, người đó có số tiền là: $T_1 = a + am = a(1+m)$.

Đầu tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$a(1+m)+a = a\left[(1+m)+1\right] = \frac{a}{\left[(1+m)-1\right]}\left[(1+m)^2-1\right] = \frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right]$$

Cuối tháng thứ II, người đó có số tiền là:

$$T_2 = \frac{a}{m}\left[(1+m)^2-1\right] + \frac{a}{m}[(1+m)^2-1]m = \frac{a}{m}[(1+m)^2-1]\,(1+m)$$

Cuối tháng thứ n, người đó có số tiền cả gốc lẫn lãi là T_n:

$$T_n = \frac{a}{m}\left[(1+m)^n-1\right](1+m)\ (2)$$

Từ công thức (2) ta dễ dàng suy ra được:

- $a = \dfrac{T_n.m}{(1+m)\left[(1+m)^n-1\right]}$

- $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{T_n.m}{a} + 1 + m\right)}{\ln(1+m)} - 1$

Ví dụ 1. Một người, hàng tháng gửi vào ngân hàng số tiền là 100 USD (Khoảng 2 triệu). Biết lãi suất hàng tháng là 0,35%. Hỏi sau 1 năm, người ấy có bao nhiêu tiền?

Lời giải và đáp số

Áp dụng công thức: $T_n = \dfrac{a}{m}\left[(1+m)^n - 1\right](1+m)$

với $a = 100$, $m = 0,35\%$, $n = 12$ ta được:

$$T_{12} = \frac{100}{0,35\%}[(1+0,35\%)^{12} - 1](1+0,35\%)$$

Nhập vào màn hình

[▭] [1] [0] [0] [▼] [0] [•] [3] [5] [SHIFT] [(] [▶] [(] [(] [1] [+] [0] [•] [3] [5] [SHIFT] [(] [)] [$x^■$] [1] [2] [▶] [−] [1] [)] [×] [(] [1] [+] [0] [•] [3] [5] [SHIFT] [(] (%) [)]

Ấn [=] Ta được kết quả: 1227,653435 ≈ 1227,7 USD.

Ví dụ 2. Muốn có 100 000 000đ sau 10 tháng thì phải gửi quỹ tiết kiệm là bao nhiêu mỗi tháng. Với lãi suất gửi là 0,6%?

Hướng dẫn thực hành

Áp dụng công thức: $a = \dfrac{T_n.m}{(1+m)\left[(1+m)^n - 1\right]}$

Số tiền gửi hàng tháng: $a = \dfrac{100000000.0,006}{(1+0,006)\left[(1+0,006)^{10} - 1\right]} = \dfrac{100000000.0,006}{1,006\left(1,006^{10} - 1\right)}$

Nhập vào màn hình

[▭] [1] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [×] [0] [•] [0] [6] [▼] [1] [•] [0] [0] [6] [×] [(] [1] [•] [0] [0] [6] [$x^■$] [1] [0] [▶] [−] [1] [)]

Ấn [=] ta được kết quả: 9674911,478.

Chú ý

✍ Cần phân biệt rõ cách gửi tiền tiết kiệm:

+ Gửi số tiền a một lần →lấy cả vốn lẫn lãi T.

+ Gửi hàng tháng số tiền a →lấy cả vốn lẫn lãi T_n.

✍ Cần phân tích các bài toán một cách hợp lý để được các khoảng tính đúng đắn.

✍ Có thể suy luận để tìm ra các công thức từ công thức tổng quát, tương tự như bài toán mở đầu.

✍ Các bài toán về dân số cũng có thể áp dụng các công thức trên đây.

Hai bài toán về dân số và gửi tiền tiết kiệm là cùng 1 dạng – toán tăng trưởng. Ở đó, học sinh phải vận dụng các kiến thức toán học để thiết lập công thức tính toán. Máy tính chỉ giúp chúng ta tính toán chính xác nhất các kết quả mà số liệu thường rất to và lẻ.

Ví dụ 3. Mỗi tháng gửi tiết kiệm 580 000đ với lãi suất 0,7% tháng. Hỏi sau 10 tháng thì lãnh về cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu?.

Hướng dẫn thực hành

Số tiền lãnh cả gốc lẫn lãi:

$$T_{10} = \frac{580\,000(1+0,007)\left[(1+0,007)^{10}-1\right]}{0,007} = \frac{580\,000.1,007.\left(1,007^{10}-1\right)}{0,007}$$

Nhập vào màn hình

[$\frac{■}{■}$] [5] [8] [0] [0] [0] [0] [×] [1] [•] [0] [0] [7] [×] [(] [1] [•] [0] [0] [7] [$x^■$] [1] [0] [▶] [−] [1] [)] [▼] [0] [•] [0] [0] [7]

Ấn [=] ta được kết quả: 6 028 055,598 {Hơn sáu triệu}

Ví dụ 4. Một người muốn sau 1 năm phải có số tiền là 20 triệu đồng để mua xe. Hỏi người đó phải gửi vào ngân hàng 1 khoản tiền như nhau hàng tháng là bao nhiêu. Biết lãi suất tiết kiệm là 0,27% / tháng.

Hướng dẫn thực hành

Áp dụng công thức $a = \dfrac{T_n.m}{(1+m)\left[(1+m)^n-1\right]}$

với $T_n = 20\,000\,000$; $m = 0,27\% = 0,0027$; $n = 12$ thì ta được

Số tiền gửi hàng tháng: $a = \dfrac{20\,000\,000 \times 0,27\%}{(1+0,27\%)\left[(1+0,27\%)^{12}-1\right]}$

Nhập vào màn hình:

[$\frac{■}{■}$] [2] [0] [×] [1] [0] [$x^■$] [6] [▶] [×] [0] [•] [2] [7] [SHIFT] [(] [▼] [(] [1] [+] [0] [•] [2] [7] [SHIFT] [(] [)] [(] [(] [1] [+] [0] [•] [2] [7] [SHIFT] [(] [)] [$x^■$] [1] [2] [▶] [−] [1] [)]

Ấn [=] ta được kết quả $a = 1\,637\,639,63$đ.

Bài toán 3. Giả sử một người gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất là $r\%$ trên 1 tháng. Mỗi tháng người ấy rút ra X đồng vào ngày ngân hàng tính lãi. Hỏi sau n tháng số tiền của người ấy còn lại là bao nhiêu?

Giải

Gọi B_i là số tiền còn lại sau tháng thứ i.

- Sau tháng thứ nhất, số tiền vốn và lãi là: $A + Ar = Ak$ với $k = 1 + r$

  Sau khi rút X đồng, số tiền còn lại là: $B_1 = Ak - X$.

- Sau tháng thứ hai, số tiền vốn và lãi là: $B_1 + B_1 r = (Ak - X)k$

  Sau khi rút X đồng, số tiền còn lại là: $B_2 = (Ak - X)k - X = Ak^2 - X.\frac{k^2 - 1}{k - 1}$.

- Bằng cách quy nạp, ta suy ra được sau tháng thứ n, số tiền còn lại là

$$B_n = Ak^n - X.\frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ với } k = 1 + r \quad (**)$$

Ví dụ 1: Giả sử một người gửi vào ngân hàng số tiền 20 000 000 đồng theo kì hạn 1 tháng với lãi suất 0,75%/ tháng. Mỗi tháng, người đó rút ra 300 000 đồng vào ngày ngân hàng tính lãi. Hỏi sau 2 năm số tiền của người ấy còn lại là bao nhiêu?

Giải

Áp dụng công thức (**) với

$A = 20\,000\,000; X = 300\,000; r = 0,75\% = 0,0075; n = 2.12 = 24$.

$$B_{24} = A(r+1)^{24} - X.\frac{(r+1)^n - 1}{r}$$

$$= 20\,000\,000(0,0075 + 1)^{24} - 300\,000.\frac{(0,0075+1)^{24} - 1}{0,0075}$$

Nhập vào màn hình

[2] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [×] [(] [0] [•] [0] [0] [7] [5] [+] [1] [)] [$x^■$] [2] [4] [▶] [−] [3] [0] [0] [0] [0] [0] [×] [▭/▭] [(] [0] [•] [0] [0] [7] [5] [+] [1] [)] [$x^■$] [2] [4] [▶] [−] [1] [▼] [0] [•] [0] [0] [7] [5]

Ấn [=] ta được kết quả 16071729,41

Ví dụ 2: Một sinh viên được gia đình cho gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng với số tiền là 20 000 000 đồng theo mức kì hạn 1 tháng với lãi suất tiết kiệm là 0,4% /tháng. Nếu mỗi tháng anh sinh viên rút ra một số tiền như nhau vào ngày ngân hàng tính lãi thì hàng tháng anh ta rút ra bao nhiêu tiền để sau 5 năm, số tiền vừa hết?

Lời giải và đáp số

Từ công thức

$$B_n = Ak^n - X.\frac{k^n - 1}{k - 1} \Rightarrow X = \frac{\left[Ak^n - B_n\right](k-1)}{(k)^n - 1} = \frac{\left[A(r+1)^n - B_n\right]r}{(1+r)^n - 1}$$

Sau 5 năm (gồm 60 tháng), anh sinh viên rút vừa hết tiền, tức $B_{60} = 0$.

Với $A = 20000000;\ B_{60} = 0;\ n = 60;\ r = 0,4\% = 0,0004$.

$$X = \frac{\left[20000000(0,4\% + 1)^{60} - 0\right]0,4\%}{(1 + 0,4\%)^{60} - 1}$$

Nhập vào màn hình

[▭] [(] [2] [0] [×] [1] [0] [$x^{■}$] [6] [▶] [×] [(] [0] [•] [4] [SHIFT] [(] [+] [1] [)] [$x^{■}$] [6] [0] [▶] [)] [×] [0] [•] [4] [SHIFT] [(] [▼] [(] [1] [+] [•] [4] [SHIFT] [(] [)] [$x^{■}$] [6] [0] [▶] [−] [1]

Ấn [=] ta được: $X \approx 375594,8402 \approx 375595$

Ví dụ 3: Một người vay ngân hàng với số tiền là 20 000 000 đồng, mỗi tháng trả góp cho ngân hàng 300 000 đồng và phải chịu lãi suất của số tiền chưa trả là 0,4%/tháng. Hỏi sau bao lâu người ấy trả hết nợ?

Giải

Áp dụng công thức $B_n = A(r+1)^n - X.\dfrac{(r+1)^n - 1}{r} \Leftrightarrow n = \log_{1+r}\dfrac{B_n r - X}{Ar - X}$

Với $A = 20.000.000;\ X = 300.000;\ r = 0,4\% = 0,0004; B_n = 0$.

$$n = \log_{1+r}\frac{B_n r - X}{Ar - X} = \log_{1+0,4\%}\frac{0 \text{x} 0,4\% - 300000}{20000000 \text{x} 0,4\% - 300000}$$

Quy trình bấm phím:

[$\log_{■}□$] [1] [+] [0] [•] [4] [SHIFT] [(] [▶] [▭] [−] [3] [0] [0] [0] [0] [0] [▼] [2] [0] [×] [1] [0] [$x^{■}$] [6] [▶] [×] [0] [•] [4] [SHIFT] [(] [−] [3] [0] [0] [0] [0] [0] [=].

Từ đó ta tính được: $n = 77,69370636 \approx 78$

Bài toán 4. Vay vốn trả góp

Ta xét bài toán tổng quát sau: Gọi số tiền vay của người đó là N đồng, lãi suất m% trên tháng, số tháng vay là n, số tiền phải đều đặn trả vào ngân hàng hàng tháng là a đồng.

Giải

Sau tháng thứ nhất số tiền gốc còn lại trong ngân hàng là: $N\left(1+\dfrac{m}{100}\right) - a$ đồng

Sau tháng thứ hai số tiền gốc còn lại trong ngân hàng là:

$$\left[N.\left(1+\frac{m}{100}\right) - a\right]\left(1+\frac{m}{100}\right) - a = N.\left(1+\frac{m}{100}\right)^2 - a.\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)+1\right] \text{đồng.}$$

Sau tháng thứ ba số tiền gốc còn lại trong ngân hàng là:

$$\left\{N.\left(1+\frac{m}{100}\right)^2 - a\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)+1\right]\right\}\left(1+\frac{m}{100}\right) - a$$

$$= N\left(1+\frac{m}{100}\right)^3 - a\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)^2 + \left(1+\frac{m}{100}\right)+1\right] \text{đồng}$$

...

Số tiền gốc còn lại trong ngân hàng sau tháng thứ n là:

$$N\left(1+\frac{m}{100}\right)^{n}-a\left[\left(1+\frac{m}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{m}{100}\right)^{n-2}+...+\left(1+\frac{m}{1000}\right)+1\right] \text{đồng}$$

Đặt $y=\left(1+\frac{m}{100}\right)$, thì ta có số tiền gốc còn lại trong ngân hàng sau tháng thứ n sẽ là: $Ny^{n}-a\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)$

Vì lúc này số tiền cả gốc lẫn lãi đã trả hết nên ta có

$$Ny^{n}-a\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)=0 \Leftrightarrow Ny^{n}=a\left(y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1\right)$$

Suy ra: $a=\frac{Ny^{n}}{y^{n-1}+y^{n-2}+...+y+1}=\frac{Ny^{n}(y-1)}{y^{n}-1}$

Ví dụ 1.

a) Một người vay vốn ở một ngân hàng với số vốn là 50 triệu đồng, thời hạn 48 tháng, lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ, trả đúng ngày qui định. Hỏi hàng tháng, người đó phải đều đặn trả vào ngân hàng một khoản tiền cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu để đến tháng thứ 48 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng?

b) Nếu người đó vay 50 triệu đồng tiền vốn ở một ngân hàng khác với thời hạn 48 tháng, lãi suất 0,75% trên tháng, trên tổng số tiền vay thì so với việc vay vốn ở ngân hàng trên, việc vay vốn ở ngân hàng này có lợi gì cho người vay không?

Hướng dẫn thực hành

a) Áp dụng công thức: $a=\frac{Ny^{n}(y-1)}{y^{n}-1}$

Thay bằng số với N = 50 000 000 đồng, n = 48 tháng, y = 1,0115 ta được:

$$a=\frac{50000000.1,0115^{48}.(1,0115-1)}{1,0115^{48}-1}$$

Quy trình bấm phím

[▭/▭] [5] [0] [×] [1] [0] [$x^{■}$] [6] [▶] [×] [1] [•] [0] [1] [1] [5] [$x^{■}$] [4] [8] [▶] [×]
[(] [1] [•] [0] [1] [1] [5] [−] [1] [)] [▼] [1] [•] [0] [1] [1] [5] [$x^{■}$] [4] [8] [▶] [−]
[1].

Ấn [=] ta được kết quả: a = 1 361 312,807 đồng.

Nhận xét: Theo kết quả trên ta thấy rằng hàng tháng người vay phải trả 1 361 312,807 đồng. Thời gian trả là 48 tháng, như vậy người đó phải trả tiền lãi cho ngân hàng là $1\ 361\ 312,807\times 48-50\ 000\ 000=15\ 343\ 014,74$.

b) Nếu vay 50 triệu đồng ở ngân hàng khác với thời hạn như trên, lãi suất 0,75% trên tháng trên tổng số tiền vay thì sau 48 tháng người đó phải trả cho ngân hàng một khoản tiền là: 50000000 + 50000000 x 0,75% x 48 = 68 000 000 đồng.

Trong khi đó vay ở ngân hàng ban đầu thì sau 48 tháng người đó phải trả cho ngân hàng một khoản tiền là: 1.361.312,807 x 48 = 65 343 014,74 đồng. Như thế việc vay vốn ở ngân hàng thứ hai thực sự không có lợi cho người vay trong việc thực trả cho ngân hàng.

Ví dụ 2. Bố bạn Bình tặng cho bạn ấy một máy tính hiệu Samsung trị giá 5 000 000 đồng bằng cách cho bạn tiền hàng tháng với phương thức sau: Tháng đầu tiên bạn Bình được nhận 100 000 đồng, các tháng từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng nhận được số tiền hơn tháng trước 20 000 đồng.

a) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền được nhận hàng tháng với lãi suất 0,6%/tháng, thì bạn Bình phải gửi bao nhiêu tháng mới đủ tiền mua máy vi tính?

b) Nếu bạn Bình muốn có ngay máy tính để học bằng cách chọn phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất 0,7%/tháng, thì bạn Bình phải trả góp bao nhiêu tháng mới trả hết nợ?

Hướng dẫn thực hành

a) Đưa 100 000 $\rightarrow$ A bằng cách: [1] [0] [0] [0] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [(−)] {A là số tiền đã góp tháng thứ D}

Đưa 100 000 $\rightarrow$ B bằng cách: [1] [0] [0] [0] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [°'"] {B là số tiền góp hàng tháng}

Đưa 1 $\rightarrow$ D {biến điếm}bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [sin]

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : B = B + 20\ 000 : A = A \times 1{,}006 + B$ bằng quy trình bấm phím:

[ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [°'"] [+] [2] [0] [0] [0] [0] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [×] [1] [•] [0] [0] [6] [+] [ALPHA] [°'"]

Ấn [CALC] và lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi A vượt quá 5 000 000 thì D là số tháng phải gửi tiếp kiệm {D= 18 tức là tháng thứ 18, nhưng tháng thứ 18 trả ít lại}.

b) Tháng thứ nhất, sau khi góp còn nợ:

A = 5000000 -100000 = 4900000 (đồng).

Đưa 4 900 000 $\rightarrow$ A bằng cách: [4] [9] [0] [0] [0] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Đưa 100 000 $\rightarrow$ B bằng cách: [1] [0] [0] [0] [0] [0] [SHIFT] [RCL] [°'"] (B)

Đưa 1 $\rightarrow$ D bằng cách: [1] [SHIFT] [RCL] [sin]

Tháng sau góp: B = B+20 000 (giá trị trong ô nhớ B cộng thêm 20000), còn nợ: $A = A \times 1{,}007 - B$.

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : B = B + 20\ 000 : A = A \text{x} 1{,}006 - B$ bằng cách:

[ALPHA] [sin] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [sin] [+] [1] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [°'"] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [°'"] [+] [2] [0] [0] [0] [0] [ALPHA] [∫] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [×] [1] [•] [0] [0] [7] [−] [ALPHA] [°'"] [CALC]

Sau đó bấm ⊟ liên tiếp cho đến khi D =D+1= 19 ứng với tháng 19 phải trả góp xong còn nợ: 23146,13225

```
A=A×1.006-B
                23146.13225
```

bấm tiếp phím ⊟ tức D =D+1= 20 ta được giá trị A âm

```
A=A×1.006-B
                -456714.991
```

Như vậy chỉ cần góp trong 20 tháng thì hết nợ, tháng cuối chỉ cần góp :

$$23\,146,13225 \times 1,007 = 23\,308,15518 \text{ đồng.}$$

Bài toán 5. (Cách tính tăng lương). Một người được lãnh lương khởi điểm là a đồng/tháng. Cứ t tháng (1 bậc) anh ta lại được tăng thêm $r\%$. Hỏi sau nt tháng làm việc anh ta lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền.

Giải

Sau t tháng anh ta nhận được tất cả là: at

Sau $2t$ tháng anh ta nhận được tất cả là:

$$at + at(1+r) = at(2+r) = at\left[\frac{(1+r)^2 - 1}{r}\right]$$

Sau $3t$ tháng số tiền mà anh ta nhận được tất cả là:

$$at\left[\frac{(1+r)^2 - 1}{r}\right] + at(1+r)^2 = at\left[\frac{(1+r)^2 - 1}{r} + (1+r)^2\right]$$

$$= at\left[\frac{(1+r)^2 - 1 + r(1+r)^2}{r}\right] = at\left[\frac{(1+r)^3 - 1}{r}\right]$$

Sau n bậc số tiền mà anh ta nhận được tất cả là: $at\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$ (*)

Ví dụ 1: Giả sử một người đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 2 000 000 đồng/tháng. Cứ 3 năm người ấy lại được tăng thêm 7%. Hỏi sau 36 năm làm việc người ấy lĩnh được tất cả bao nhiêu tiền?

Lời giải và đáp số

Áp dụng công thức

$$T = at\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right] \text{ (*) với}$$

$a = 2.000.000; r = 7\% = 0,07; n = 36 : 3 = 12; t = 3.12$ ta được

$$T = \frac{36 \times 2.000.000\left[(1+0,07)^{12} - 1\right]}{0,07}$$

Quy trình bấm phím

[▤] [3] [6] [×] [2] [0] [0] [0] [0] [0] [0] [×] [(] [(] [1] [+] [0] [•] [0] [7] [)] [$x^■$] [1] [2] [▶] [−] [1] [)] [▼] [0] [•] [0] [7] [=]

Ta được kết quả 1 287 968 492 (Hơn một tỉ).

III. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Một người gửi vào sổ tiết kiệm ngân hàng số tiền là 10 000 000 đồng, lãi suất 0,6% tháng.

a) Hỏi sau đúng 3 năm số tiền trong sổ sẽ là bao nhiêu, biết rằng trong suốt thời gian đó, người gửi không rút một đồng nào cả gốc lẫn lãi (làm tròn đến đồng) và lãi suất không thay đổi?

b) Nếu người đó gửi vào ngân hàng 50 000 000 đồng với lãi suất 0,6% tháng. Sau mỗi tháng người đó đến ngân hàng rút mỗi tháng 3 000 000 đồng để chi tiêu. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó rút hết tiền cả gốc lẫn lãi, cho biết số tiền tháng cuối cùng người đó rút là bao nhiêu? biết rằng trong suốt thời gian đó người gửi không rút một đồng nào cả gốc lẫn lãi (làm tròn đến đồng) và lãi suất không thay đổi?

(Trích Đề thi HSG MTCT, Huế 2014)

Lời giải và đáp số

a) Áp dụng công thức tính lãi kép: $A = a(1+r)^n$

Với A : số tiền có được sau 3 năm,

a : số tiền gửi ban đầu tức $a = 10^7$

r: lãi suất hàng tháng tức $r = 0,6\%$

n: là số tháng gửi ngân hàng tức $n = 36$ tháng

Vậy $A = a(1+r)^n = 10^7.(1+0,6\%)^{36}$

Quy trình bấm phím:

[1] [0] [$x^■$] [7] [▶] [×] [(] [1] [+] [0] [•] [6] [SHIFT] [(] [)] [$x^■$] [3] [6] [=]

Vậy số tiền người đó có cả vốn lẫn lãi là: $A = 12\ 403\ 016$

b) a : số tiền gửi ban đầu tức $a = 50 \times 10^6 \to A$

r: lãi suất hàng tháng tức $r = 0,6\% \Rightarrow 1 + r = 1 + 0,006 \to C$

n: là số tháng rút ngân hàng tức $n = 0 \to D$ {biến đếm}

b: là số tiền rút hàng tháng tức $b = 3\times 10^6 \to B$

Vậy $A = a(1+r)^n = 10^7.(1+0,6\%)^{36}$

Sau tháng thứ nhất: Số tiền cả vốn lẫn và lẫn lãi là: $A = AC$

Số tiền sau khi rút lần 1 là: $AC - B \to A$

Ghi vào màn hình: $D = D + 1 : A = AC - B$ bằng cách:

ALPHA sin ALPHA CALC ALPHA sin + 1 ALPHA ∫ ALPHA (−) ALPHA CALC ALPHA (−) ALPHA hyp = ALPHA °’’’ CALC

Lặp lại phím = đến khi $D = 17$

D=D+1
17

Ta được $A = 1829294$

A=AC-B
1829294.069

Ấn tiếp phím = tức $D = 18$

A=AC-B
-1159730.167

Vậy sau 18 tháng thì người đó rút hết tiền cả vốn lẫn lãi.

Số tiền tháng cuối cùng người đó rút là:

$3\ 000\ 000 - 1\ 159\ 730{,}167 = 1\ 840\ 269{,}833 = 1\ 840\ 269$ đồng.

BT 2. a) Một người gửi tiết kiệm 250 000 000 đồng loại kỳ hạn 3 tháng vào ngân hàng với lãi suất 10,45% một năm. Hỏi sau 10 năm 9 tháng người đó nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi. Biết rằng người đó không rút lãi tất cả các định kỳ trước đó.

b) Nếu với số tiền câu a, người đó gửi tiết kiệm loại kỳ hạn 6 tháng vào ngân hàng với lãi suất 10,5% một năm thì sau 10 năm 9 tháng người đó nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi. Biết rằng người đó không rút lãi tất cả các định kỳ trước và nếu rút tiền trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo loại không kì hạn là 0,015% một ngày (1 tháng tính 30 ngày).

Lời giải và đáp số

a) Gọi a là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất ngân của một kỳ hạn, n là số kỳ hạn, thì số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn là: $A = a(1+r)^n$

Lãi suất một kỳ hạn 3 tháng là: $\frac{3}{12}\times 10,45\% = \frac{2,6125}{100}$

Sau 10 năm 9 tháng (có nghĩa là 129 tháng hay 43 kì hạn), người đó nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là: $A = 250\ 000\ 000\times\left(1+\frac{2,6125}{100}\right)^{43}$ đồng

Dùng MTCT ta tính được $A = 757\ 794\ 696,8$ đồng.

b) Một kỳ hạn 6 tháng có lãi suất là: $\frac{10,5\%}{12}\times 16 = \frac{5,25}{100}$

Sau 10 năm 6 tháng (có nghĩa là sau 126 tháng hay 21 kì hạn), số tiền cả vốn lẫn lãi người đó nhận được là

$$B = 250\ 000\ 000\times\left(1+\frac{5,25}{100}\right)^{21} \text{ đồng}$$

Vì 10 năm 9 tháng bằng 21 kỳ hạn dư 90 ngày. Do đó số tiền B được tính lãi suất không kì hạn trong 90 ngày là

$$C = 250\ 000\ 000\times\left(1+\frac{5,25}{100}\right)^{21}\times\frac{0,15}{100}\times 90 = 135\times 250\ 000\times\left(1+\frac{5,25}{100}\right)^{21} \text{ đồng}$$

Vậy sau 10 năm 9 tháng người đó nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là:

$$250\ 000\ 000\times\left(1+\frac{5,25}{100}\right)^{21} + 135\times 250\ 000\times\left(1+\frac{5,25}{100}\right)^{21}$$

$$= 250\ 000\ 000\times\left(1+\frac{5,25}{100}\right)^{21}\times(1000+135) = 1135\times 250\ 000\times\left(1+\frac{5,25}{100}\right)^{21}$$

Dùng MTCT ta tính đươc kết quả: 830 998 165,2 đồng.

BT 3. Dân số một nước là 80 triệu người, mức tăng dân số là 1,1% mỗi năm. Tính dân số của nước đó sau n năm. Áp dụng với $n = 20$.

Lời giải và đáp số

Áp dụng công thức: $T = a(1+r)^n$

Với $a = 80\ 000\ 000; n = 20, m = 1,1\%$.

Dùng MTCT ta tính được: $T = 99\ 566\ 457$.

BT 4. Lãi suất tiết kiệm của một số ngân hàng hiện nay là 8,4% năm đối với tiền gửi có kỳ hạn một năm. Để khuyến mãi, một ngân hàng thương mại A đã đưa ra dịch vụ mới: Nếu khách hàng gửi tiết kiệm một năm đầu thì lãi suất 8,4%, sau đó lãi suất tăng so với năm trước đó là 1%.

Hỏi nếu gửi 1 000 000 đồng theo dịch vụ đó thì số tiền sẽ nhận được bao nhiêu sau: 10 năm, 15 năm? Nêu sơ lượt cách giải.

Lời giải và đáp số

Lãi suất năm thứ nhất là 8,4%

Vì lãi suất năm sau tăng thêm so với năm trước 1% nên ta có:

Lãi suất năm thứ hai là: $8,4\% \times (1+1\%)$

Lãi suất năm thứ ba là: $8,4\% \times (1+1\%) \times (1+1\%)$

Số tiền nhận được sau một năm là: $1\,000\,000 \times 8,4\% \times (1+1\%)$

Số tiền nhận được sau hai năm là: $1\,000\,000 \times (8,4+1) \times (8,4 \times (1+1\%)+1\%)$

Số tiền nhận được sau n năm là

$1\,000\,000 \times (8,4\%+1) \times \left(8,4\% \times (1+1\%)^2+1\right) \times \ldots \times \left(8,4 \times (1+1\%)^{n-1}+1\right)$

Đưa $1\,000\,000 \to A$, đưa $8,4\% \to B$, đưa $0 \to M$ {biến đếm}

Ghi vào màn hình: $M = M+1 : A = A(1+B) : B = B(1+1\%)$

Ấn CALC sau đó lặp lại liên tiếp phím =

Đáp số: Sau 10 năm: 2 321 713,755 đồng; Sau 15 năm: 3 649 292,01 đồng.

BT 5. Dân số một thành phố năm 2007 là 330 000 người.

a) Hỏi năm 2007-2008, dự báo có bao nhiêu học sinh lớp 1 (6 tuổi) đến trường, biết rằng trong 10 năm trở lại đây tỉ lệ tăng dân số mỗi năm của thành phố là 1,5% và thành phố thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi đều vào lớp 1?

b) Đến năm 2015-2016, thành phố đáp ứng được 120 phòng học cho học sinh lớp 1, mỗi phòng dành cho 35 học sinh thì phải kiềm chế tỉ lệ tăng dân số mỗi năm là bao nhiêu, bắt đầu từ năm 2007? (Kết quả lấy hai chữ số ở phần thập phân)

Lời giải và đáp số

a) Áp dụng công thức: $A = a(1+m)^n$

Trong đó: $A = 330\,000; m = 1,5\%; n = 7$.

Ta suy ra được số dân năm 2000 là: $a = \dfrac{330\,000}{(1+1,5\%)^7}$

Chỉ những em sinh năm 2001 mới đủ tuổi đi học (6 tuổi) vào lớp 1 ở năm học 2007-2008. Vậy trẻ em (sinh năm 2001) học lớp 1 năm học 2007-2008 là

$$\frac{330\,000}{(1+1,5\%)^7} \times 1,5\%$$

Dùng MTCT ta tính được kết quả là 4460

Vậy số trẻ em học lớp 1 năm 2007-2008 vào khoảng 4460 em.

b) Gọi x là tỉ lệ tăng dân số cần khống chế từ năm 2007

Vì số dân năm 2007 là 330 000 người nên số dân năm 2008 là:

$$330\,000 \times \left(1+\frac{x}{100}\right)$$

Số trẻ em sinh năm 2009 là: $330\,000 \times \left(1+\dfrac{x}{100}\right) \times \dfrac{x}{100}$

Vì chỉ có những em sinh năm 2009 mới đủ 6 tuổi vào học lớp 1 năm 2015-2016. Ta có phương trình sau:

$$330\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)\times\frac{x}{100}:35=120 \text{ (phòng) (1)}$$

Phương trình (1) tương đương với phương trình:

$$\frac{3300x+33x^2}{35}=120 \Leftrightarrow 33x^2+3300x-4200=0$$

Đáp số: Tỉ lệ tăng dân số cần khống chế là $1,25\%$.

BT 6. Xã A có 10 000 dân. Với mức tăng dân số bình quân 2,0% hằng năm thì sau n năm dân số sẽ vượt 15 000 dân.

1) Hỏi n nhỏ nhất sẽ là bao nhiêu, lúc đó dân số xã là bao nhiêu?

2) Sau ba năm thực hiện kế hoach hóa gia đình, số dân của xã là 10 395 người. Hỏi:

a) Mức tăng dân số thực tế trong ba năm vừa qua của xã A là bao nhiêu phần trăm (ký hiệu r%, r lấy hai chữ số)

b) Nếu mức tăng dân số như ba năm qua, thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa (ký hiệu m năm) số dân sẽ vượt quá 15 000 dân.

Lời giải và đáp số

1) Ta sử dụng công thức $A=a(1+r)^n$

Với tỉ lệ tăng dân số là 2% hàng năm và để số dân vượt 15 000 người thì

$$10\,000(1+2\%)>15\,000 \Leftrightarrow (1+0,02)^n>1,5$$

Đưa $0\to M$. Ghi vào màn hình: $M=M+1:(1+0,02)^M$, lặp lại liên tiếp phím

[=] cho đến khi $M+1=21$ ta được $(1+0,02)^M=1,515666344$

Vậy sau $n=21$ năm thì dân số của xã đó sẽ vượt quá 15 000.

Số dân của xã lúc đó là: $10\,000(1+0,02)^{21}=15\,156,66344$

Vậy sau 21 năm thì số dân của xã đó là: 15 157 (người)

Đáp số: $n=21$, số dân: 15 157 (người).

2)

a) Theo công thức $A=a(1+r)^n$ ta có

$$1\,000\left(1+\frac{r}{100}\right)^3=10395 \Leftrightarrow 1+\frac{r}{100}=\sqrt[3]{\frac{10\,395}{10\,000}} \Rightarrow r\approx 1,29970125.$$

Đáp số: $r\approx 1,3\%$

b) Nếu dân số tăng như ba năm qua với mức tăng là 1,3% thì số dân của xã sẽ vượt 15 000 (người), sau số năm là:

$10\,000(1+1,3\%)^n > 15\,000 \Leftrightarrow (1+0,013)^n > 1,5$

Đưa $0 \to M$. Ghi vào màn hình: $M = M+1 : (1+0,013)^M$

Lặp lại liên tiếp phím ⊟ cho đến khi $M+1=32$ ta có:

$$(1+0,013)^M = 1,511827537$$

Có nghĩa với mức tăng 1,3% thì sau $m=32$ năm số dân của xã đó sẽ vượt 15 000 người.

Đáp số: $m=32$.

BT 7. Dân số tỉnh Phú Yên năm 2007 là 820 000 người. Người ta dự đoán đến năm 2010 dân số của tỉnh Phú Yên sẽ là 862 535 người.

a) Hỏi trung bình mỗi năm dân số của tỉnh Phú Yên tăng bao nhiêu phần trăm.

b) Với tỉ lệ tăng dân số hàng năm như vậy, hỏi đến năm 2015 dân số Phú Yên là bao nhiêu?

Lời giải và đáp số

a) Áp dụng công thức: $A = a(1+r)^n$, trong đó a là số dân tại thời điểm ban đầu, A là số năm thứ n, r là mức tăng trưởng dân số.

Ta có: $862\,535 = 820\,000 \times (1+r)^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{862\,535}{820\,000}} - 1 \approx 1,7\%$

b) Với tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,7% thì đến năm 2015 số dân của tỉnh Phú Yên sẽ là: $820\,000 \times (1+0,017)^8 \approx 938\,386$ người

Đáp số: Đến năm 2015, số dân tỉnh Phú Yên khoảng 983 nghìn người.

BT 8. Dân số thế giới cuối năm 1995 là 5,6 tỉ người.

a) Hỏi với mức tăng trưởng 1,7%thì vào năm 2008, dân số của thế giới là bao nhiêu?

b) Với tỉ lệ tăng dân số như trên, sau bao nhiêu năm nữa thì dân số thế giới sẽ lên đến 10 tỉ người.

Lời giải và đáp số

a) Áp dụng công thức: $A = a(1+r)^n$ với $a = 5,6$ tỉ người, $r = 1,7\%; m = 12$

Do đó: $A \approx 7$ tỉ người.

b) Giả sử từ năm 1995 đến năm thứ n, với mức tăng dân số là 1,7 % thì dân số là: $A = 10$ tỉ:

Ta có $10 = 5,6\left(1+\dfrac{1,7}{100}\right)^n$

Đáp số: Sau 35 năm (kể từ 1995) thì dân số thế giới trên 10 tỉ đồng.

BT 9. Một người mua xe ôtô trị giá 200 000 000 đồng theo phương thức trả góp, mỗi tháng ông ta phải trả 3 000 000 đồng.

a) Sau bao nhiêu tháng ông ta trả hết số tiền trên?

b) Nếu phải chịu lãi suất của một số tiền chưa trả là $0,4\%$ trên tháng và mỗi tháng kể từ tháng thứ hai ông ta vẫn trả 3 000 000 đồng thì sau bao lâu ông ta trả hết số tiền trên.

Hướng dẫn thực hành

a) Bấm phím 200 000 000 cho 3 000 000 ta được kết quả $66,(6)$

Vậy sau 67 tháng người mua xe trả hết số tiền

b) Đưa $200\ 000\ 000 \to A$.

Gọi a_n là số tiền người mua xe còn nợ sau tháng thứ n.

Vậy ta có:

$$a_{n+1} = a_n + a_n \times \frac{0,4}{100} - 3\ 000\ 000 = a_n\left(1+\frac{0,4}{100}\right) - 3\ 000\ 000$$
$$= a_n \times 1,004 - 3\ 000\ 000$$

Đưa $0 \to D$; đưa $200\ 000\ 000 \to A$.

Ghi vào màn hình: $D = D+1 : A = 1,004A - 3\ 000\ 000$

Lặp lại liên tiếp phím ⊟ cho đến khi giá trị trên man hình nhận giá trị âm đầu tiên là $-917608,9225$ tương ứng với $D = D+1 = 78$

Vậy sau 78 tháng người mua xe trả hết tiền.

BT 10. Một nhân viên A vay ngân hàng 30 triệu đồng theo phương thức trả góp với lãi suất 1,7% một tháng, tính theo dư nợ, thời hạn trả hết nợ là 24 tháng. Hỏi mỗi tháng nhân viên A phải trả một số tiền cố định là bao nhiêu?

Lời giải và đáp số

Gọi A là số tiền phải trả cố định hàng tháng, a là số tiền vay, r là lãi suất vay theo tháng và $x = 1 + r$

Khi đó đến cuối tháng n (thời hạn kết thúc vay số tiền a) thì số tiền nợ sẽ là

$$T_n = a.x^n - \left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right)A = a.x^n - A.\frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Để trả hết nợ

$$T_n = 0 \Leftrightarrow a.x^n - A.\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow A = \frac{a(x-1)x^n}{x^n - 1}$$

Vậy, số tiền phải trả hàng tháng là

$$A = \frac{30 \times 10^6 \times 0,017 \times 1.017^{24}}{1,017^{24} - 1} = 1\ 532\ 742,68522 \text{ đồng.}$$

BT 11. a) Bạn An gửi tiết kiệm một số tiền ban đầu là 1 000 000 đồng với lãi suất 0,58%/tháng (không kỳ hạn). Hỏi bạn An phải gửi bao nhiêu tháng thì được cả vốn lẫn lãi bằng hoặc vượt quá 1 300 000 đồng ?

b) Với cùng số tiền ban đầu và cùng số tháng đó, nếu bạn An gửi tiết kiệm có kỳ hạn 3 tháng với lãi suất 0,68%/tháng, thì bạn An sẽ nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng trong các tháng của mỗi kỳ hạn, chỉ cộng thêm lãi chứ không cộng vốn và lãi tháng trước để tình lãi tháng sau. Hết một kỳ hạn, lãi sẽ được cộng vào vốn để tính lãi trong kỳ hạn tiếp theo (nếu còn gửi tiếp), nếu chưa đến kỳ hạn mà rút tiền thì số tháng dư so với kỳ hạn sẽ được tính theo lãi suất không kỳ hạn.

Lời giải và đáp số

a) Đáp số: $n = 46$ (tháng)

b) 46 tháng = 15 quý + 1 tháng

Số tiền nhận được sau 46 tháng gửi có kỳ hạn:

$1000000(1+0.0068\times3)^{15}\times1,0058 = 1361659,061$ đồng

BT 12. Sinh viên Châu vừa trúng tuyển đại học được ngân hàng cho vay trong 4 năm học mỗi năm 2.000.000 đồng để nộp học phí, với lãi suất ưu đãi 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học, bạn Châu phải trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền m (không đổi) cũng với lãi suất 3%/năm trong vòng 5 năm. Tính số tiền m hàng tháng bạn Châu phải trả nợ cho ngân hàng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải và đáp số

Sau 4 năm, bạn Châu nợ ngân hàng:

$A = 2000000(1.03^4 + 1.03^3 + 1.03^2 + 1.03) \approx 8618271.62$

Năm thứ nhất bạn Châu phải góp 12m (đồng). Gọi $q = 1 + 0.03 = 1.03$

Sau năm thứ nhất, Châu còn nợ: $x_1 = Aq - 12m$

Sau năm thứ hai, Châu còn nợ: $x_2 = (Aq - 12m)q - 12m = Aq^2 - 12m(q+1)$

Sau năm thứ năm, Châu còn nợ $x_5 = Bq^5 - 12m(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$.

Giải phương trình:

$x_5 = Bq^5 - 12m(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) = 0$, ta được $m = 156819$

BT 13. Theo dự báo với mức tiêu thụ dầu không đổi như hiện nay thì trữ lượng dầu của một nước sẽ hết sau 50 năm nữa. Nhưng do nhu cầu thực tế, mức tiêu thụ tăng lên 5% mỗi năm. Hỏi sau bao nhiêu năm số dầu dự trữ sẽ hết.

(Trích Đề thi HSG MTCT Vĩnh Phúc 2009)

Hướng dẫn giải

Gọi mức tiêu thụ dầu hàng năm là A thì lượng dầu là 50A.

Gọi x_n là lượng dầu tiêu thụ năm thứ n thì $x_{n+1} = 1,05.\, x_n$.

Tổng dầu tiêu thụ trong N năm là:

$x_1 + x_2 + ... + x_N = (1,05^N - 1)A/0,05$

Giải pt: $(1,05^N - 1)A/0,05 = 50A$

Ta được $1,05^N = 3,5$

Kiểm tra trên máy ta có : $25 < N < 26$

Vậy sau 25 năm lượng dầu dự trữ sẽ hết.

BT 14. (Bài toán lạm phát tiền tệ) Lạm phát tiền có thể hiểu đơn giản là sự gia tăng liên tục của giá cả đối với các mặt hàng, ví dụ lạm phát một năm 10% có nghĩa là sau một năm số tiền để mua một mặt hàng nào đó tăng lên 10%, tức là sau một năm thì 1.100.000đ có giá trị bằng 1.000.000đ cách đây một năm (khi đó ta nói đồng tiền bị mất giá).

Một người gửi tiết kiệm 100.000.000đ tại ngân hàng với lãi suất 15%/năm (kỳ hạn 1 năm), biết rằng lạm phát năm đầu tiên khi gửi là 8% và sau mỗi năm lạm phát lại tăng thêm 10%. Hỏi sau ít nhất bao năm thì người đó nhận được một số tiền có giá trị bé hơn số tiền ban đầu mà người đó gửi vào ngân hàng?

Hướng dẫn giải

Gọi n là số năm gửi tiết kiệm. Khi đó số tiền gửi sau n năm là: $A.(1.15)^n$ với $A = 100.000.000$ đ

Ngoài ra chỉ số lạm phát trong năm thứ m sau khi gửi là $0.08x(1.1)^{m-1}$

Vậy sau n năm số tiền có giá trị bằng số tiền ban đầu là

$$A(1+0.08)\left(1+0.08x(1.1)\right)\left(1+0.08x(1.1)^2\right)(...)\left(1+0.08x(1.1)^{n-1}\right)$$

Quy trình bấm phím

$$D = D+1 : B = B.\left(1+0.08x(1.1)^{D-1}\right) : C = B-(1.15)^D$$

Nhấn CACL với các giá trị ban đầu là: $D = 0$; $B = 1$. Nhấn dấu ⊟ liên tục cho đến khi $c > 0$ thì dừng. Khi đó D=14

Vậy sau 14 năm thì số tiền gửi rút ra sẽ có giá trị bé hơn số tiền ban đầu gửi vào.

BT 15. Một người gửi 9,8 triệu đồng tiết kiệm với lãi suất 8,4% /năm và lãi suất hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi theo cách đó thì sau bao nhiêu năm người đó thu được tổng số tiền là 20 triệu đồng (biết rằng lãi suất không thay đổi)

Hướng dẫn giải

Gọi A là số tiền gửi ban đầu.

Sau n năm ($n \in \mathbb{N}$) số tiền thu được là: $A_n = A \times (1+0,084)^n = A \times (1,084)^n$

Áp dụng với số tiền bài toán đã cho: $20 = 9,8 \times (1,084)^n$

$$\Leftrightarrow (1,084)^n = \frac{20}{9,8} \Rightarrow n = \log_{1,084}\frac{20}{9,8} \approx 8,844141258$$

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 9$

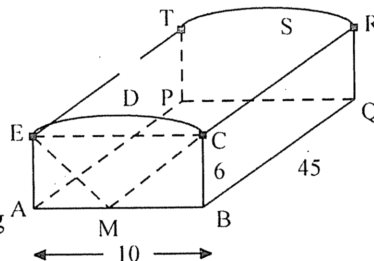
Chủ đề 7:
CÁC BÀI TOÁN CÓ NGUỒN GỐC THỰC TIỄN

Đưa Toán học vào thực tiễn là một vấn đề cấp thiết cho chương trình Toán học của nước ta hiện nay. Sử dụng các kiến thức toán học để giải quyết các tình huống thực tế là chìa khóa giúp các em học sinh giải quyết thành công một lớp bài toán mà các em sẽ gặp trong cuộc sống. Chính vì vây, những năm qua trong các kì thi "Giải toán trên máy tính cầm tay" được Bộ Giáo Dục và Đào Tạo quan tâm đến nội dung này. Nhằm giúp các em tiếp cận và làm quen với các dạng toán thực tiễn, chủ đề này xin được giới thiệu một số bài toán là những đề thi MTCT của BGD và các SGD và ĐT trong những năm gần đây. Mỗi bài toán đề cập đến một lĩnh vực của toán học như Lượng giác, Đạo hàm, Hình học, Dãy số, Giải tích tổ hợp, bất đẳng thức,... Trong nội dung bài báo này, chúng tôi đều tiến hành các thao tác trên máy tính VINACAL 570ES PLUS II, CASIO fx − 570 VN PLUS , hai dòng máy có nhiều tính năng nhất được BGD và ĐT cho phép mang vào phòng thi.

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Một hộp nữ trang (xem hình vẽ) có mặt bên ABCDE với ABCE là hình chữ nhật, cạnh cong CDE là một cung của đường tròn tại trung điểm M của AB; $AB = 10cm, BC = 6cm$, $BQ = 45cm$. Hãy tính

1. Góc CME theo radian
2. Độ dài cung CDE
3. Diện tích hình quạt MCDE
4. Diện tích toàn phần của hộp nữ trang
5. Thể tích của hộp nữ trang.



(Đề thi HSG MTCT Quốc gia 2009)

Lời giải và đáp số

1. Chọn đơn vị góc là rad bằng cách SHIFT MODE 4

Ta có:

$$\widehat{CME} = \pi - \left(\widehat{AME} + \widehat{BMC}\right) = \pi - 2\widehat{BMC} = \pi - 2.\arctan\frac{BC}{MB} = \pi - 2.\arctan\frac{2BC}{AB}$$

Sử dụng MTCT tính góc $\widehat{CME}$ và đưa vào ô nhớ A bằng cách:

SHIFT ×10ˣ − 2 × SHIFT tan 2 × 6 ÷ 1 0) =

{Kết quả: 1,389476552(rad) } SHIFT RCL (−).

2. Gọi l là độ dài cung CDE . Ta có: $l = MC.\widehat{CME} = \sqrt{BC^2 + \frac{AB^2}{4}}.\widehat{CME}$

Sử dụng MTCT tính MC và lưu vào ô nhớ B như sau:

[√] [6] [x²] [+] [1] [0] [x²] [÷] [4] [=] {Kết quả $\sqrt{61}$} [SHIFT] [RCL] [°'''].

Tính l và lưu vào ô nhớ C bằng cách [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [(−)] [=]

{Kết quả 10,85215879cm} [SHIFT] [RCL] [hyp]

3. Diện tích hình quạt MCDE là $S_{MCDE} = \frac{\widehat{CME}.MC^2}{2}$. Tính S_{MCDE} và lưu vào ô nhớ D bằng cách [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [°'''] [x²] [÷] [2] [=] {Kết quả 42,37903485cm^2} [SHIFT] [RCL] [sin].

4. Diện tích $S_{ABCDE} = S_{MCDE} + 2S_{MBC} = S_{MCDE} + \frac{1}{2}BC.BA$. Tính S_{ABCDE} và lưu vào ô nhớ E bằng cách [ALPHA] [sin] [+] [6] [×] [1] [0] [÷] [2] [SHIFT] [RCL] [cos] {Kết quả 72,37903485}. Chu vi của hình ABCDE là $P_{ABCDE} = l + 2BC + AB$. Diện tích xung quanh của hình hộp nữ trang: $S_{xq} = P_{ABCDE}.BQ = (l + 2BC + AB).BQ$. Tính S_{xq} bằng cách [(] [ALPHA] [hyp] [+] [2] [×] [6] [+] [1] [0] [)] [×] [4] [5] [=] {Kết quả 1478,347146}. Diện tích toàn phần của hộp nữ trang $S_{tq} = S_{xq} + 2.S_{ABCDE}$. Tính S_{tp} bằng cách [Ans] [+] [2] [ALPHA] [cos] [=] {Kết quả 1623,105215cm^2}.

5. Thể tích của hộp nữ trang $V = BQ.S_{ABCDE}$.

Tính V bằng cách [4] [5] [ALPHA] [cos] [=] {Kết quả 3257,056568cm^3}.

Ví dụ 2. Để đắp một con đê, địa phương đã huy động 4 nhóm người gồm học sinh, nông dân, công nhân và bộ đội. Thời gian làm việc như sau (giả sử thời gian làm việc của mỗi người trong một nhóm là như nhau): Nhóm bộ đội mỗi người làm việc 7 giờ; nhóm công nhân mỗi người làm việc 4 giờ; Nhóm nông dân mỗi người làm việc 6 giờ và nhóm học sinh mỗi em làm việc 0,5 giờ. Địa phương cũng đã chi tiền bồi dưỡng như nhau cho từng người trong một nhóm theo cách: Nhóm bộ đội mỗi người nhận 50.000 đồng; Nhóm công nhân mỗi người nhận 30.000 đồng; Nhóm nông dân mỗi người nhận 70.000 đồng; Nhóm học sinh mỗi em nhận 2.000 đồng.

Cho biết : Tổng số người của bốn nhóm là 100 người;

Tổng thời gian làm việc của bốn nhóm là 488 giờ;

Tổng số tiền của bốn nhóm nhận là 5.360.000 đồng;

Tìm xem số người trong từng nhóm là bao nhiêu người.

Lời giải và đáp số

Gọi x,y,z,t lần lượt là số người trong nhóm học sinh, nông dân, công nhân và bộ đội.

Điều kiện: $x,y,z,t \in Z^+$, $0 < x,y,z,t < 100$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+z+t=100 \\ 0,5x+6y+4z+7t=488 \\ 2x+70y+30z+50t=5360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11y+7z+13t=876 \\ 17y+7z+12t=1290 \end{cases}$$

$\Rightarrow t=6y-414$ do $0<t<100 \Rightarrow 69<y<86$

Từ $11y+7z+13t=876 \Rightarrow z=\dfrac{876-11y-13t}{7}$

Gán 69 vào ô nhớ Y bằng cách [6] [9] [SHIFT] [RCL] [S⇔D]

Ghi vào màn hình: Y=Y+1:B =6Y–414: A=(876–11Y–13B)÷7:X=100–Y–B–A

Bằng cách ấn liên tiếp các phím sau

[6] [9] [SHIFT] [RCL] [S⇔D] [ALPHA] [S⇔D] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [S⇔D] [+] [1] [ALPHA] [√▭] [ALPHA] [°'''] [ALPHA] [CALC] [6] [ALPHA] [S⇔D] [−] [4] [1] [4] [ALPHA] [√▭] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [(] [8] [7] [6] [−] [1] [1] [ALPHA] [S⇔D] [−] [1] [3] [ALPHA] [°'''] [)] [÷] [7] [ALPHA] [√▭] [ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [1] [0] [0] [−] [ALPHA] [S⇔D] [−] [ALPHA] [°'''] [−] [ALPHA] [(−)]

{Biến Y tương ứng với giá trị y, Biến B tương ứng với giá trị t, Biến A tương ứng với giá trị z và biến X tương ứng với giá trị x }.

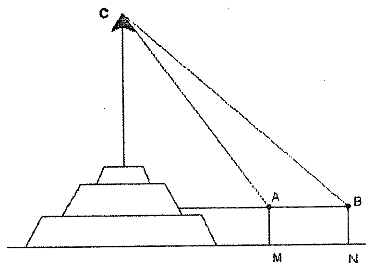
Ấn phím [CALC] sau đó ấn liên tiếp phím [=] để thử các giá trị của Y từ 70 đến 85 để kiểm tra các số B, A, X là các số nguyên dương và nhỏ hơn 100 là đáp số.

Ta được: Y = 70 ; B = 6 ; A = 4 ; X = 20. Vậy, nhóm học sinh là 20 người ; nhóm nông dân là 70 người; nhóm công nhân là: 4 người, nhóm bộ đội là 6 người.

Ví dụ 3. Để đo chiều cao từ mặt đất đến đỉnh cột cờ của một Kỳ đài trước Ngọ Môn (Đại Nội – Huế), người ta cắm hai cọc bằng nhau MA và NB cao 1,5m (so với mặt đất) song song, cách nhau 10m và thẳng hàng so với tim cột cờ. Đặt giác kế đứng tại A và tại B để nhắm đến đỉnh cột cờ, người ta đo được các góc lần lượt là $51^0 49'12''$ và $45^0 39'$ so với đường song song mặt đất. Hãy tìm gần đúng chiều cao đó.

(Trích Đề thi HSG Huế 2005 Khối THCS)

Lời giải và đáp số



Xét ΔABC có:

$\widehat{C}=51^0 49'12''-45^0 39'=6^0 10'12''$

Ta có: $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}\Rightarrow AC=\dfrac{10.\sin 45^0 39'}{\sin 6^0 10'12''}$.

Gọi H là giao điểm của AB với tim cột cờ thì

$$HC=AC\sin 51^0 49'12''=\frac{10\sin 45^0 39'.\sin 51^0 49'12''}{\sin 6^0 10'12''}$$

Sử dụng MTCT tính giá trị này ta được $HC\approx 52,2994$m.

Ví dụ 4. Người ta muốn làm một con đường đi từ địa điểm A đến địa điểm B ở hai bên bờ một con sông, các số liệu được thể hiện trên hình vẽ, con đường được làm theo đường gấp khúc AMNB. Biết rằng chi phí xây dựng một km đường bên bờ có điểm B nhiều gấp 1,3 lần chi phí xây dựng một km đường bên bờ có điểm A, chi phí làm cầu MN tại địa điểm nào cũng như nhau. Hỏi phải xây cầu tại điểm M cách điểm H bao nhiêu km để chi phí làm đường là nhỏ nhất?

(Trích đề thi MTCT Thanh Hóa 2012).

Lời giải và đáp số

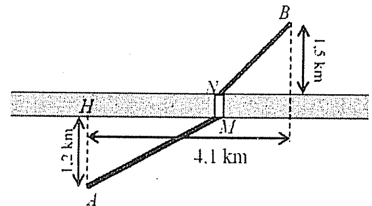
Đặt $x = HM\left(0 \le x \le 4,1\right)$

$\Rightarrow AM = \sqrt{x^2 + 1,44},\ BN = \sqrt{\left(4,1 - x\right)^2 + 2,25}$

Gọi a là số tiền để làm 1km đường bên bờ có điểm A. Khi đó chi phí để làm hai đoạn AM và BN là

$$f(x) = a\sqrt{x^2 + 1,44} + 1,3a\sqrt{\left(4,1 - x\right)^2 + 2,25}$$

$$f'(x) = a.\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1,44}} - 1,3a\frac{4,1 - x}{\sqrt{\left(4,1 - x\right)^2 + 2,25}}$$



Dùng chức năng SHIFT CALC (SOLVE) giải

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 2,630356850 = x_0$.

Dùng chức năng CALC tính

$f(x_0) \approx 5,621108864a;\ f(0) = 6,87550878a;\ f(4,1) = 6,22200187a$

Do đó: $\underset{[0;4,1]}{\text{Min}} f(x) = f(x_0)$. Vậy $HM \approx 2,63036\text{km}$

Ví dụ 5. Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ hộp (sắt tây) là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Em hãy cho biết diện tích toàn phần của lon khi ta muốn có thể tích của lon là $314\,\text{cm}^3$.

(Trích Đề thi HSG MTCT Bạc Liêu 2010).

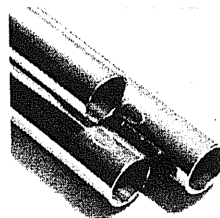
Lời giải và đáp số

Thể tích hình trụ $V = \pi r^2 h = 314$

$$S_{tp} = 2\pi r\left(h + r\right) = 2\pi r^2 h\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{h}\right) = 2\pi r^2 h\left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{h}\right)$$

$$\ge 628.3\sqrt[3]{\frac{1}{4r^2 h}} = 628.3.\sqrt[3]{\frac{\pi}{4.314}}$$

Sử dụng MTCT ta tính được S_{tp} nhỏ nhất $\approx 255,7414\ (\text{cm}^2)$.



Ví dụ 6. Ống thép tròn $\phi 21$ theo tiêu chuẩn BS1 có đường kính trong là 15mm độ dày 2mm, chiều dài mỗi ống là 6m. Biết khối lượng riêng của thép là $7800 kg/m^3$. Hỏi 10 tấn thép nguyên liệu làm được bao nhiêu ống thép theo tiêu chuẩn trên?

(Trích Đề thi HSG MTCT An Giang 2012)

Lời giải và đáp số

Diện tích mặt cắt của ống: $S = \pi R^2 - \pi r^2$ với $r = 0,0075m$; $R = 0,0095m$

Thể tích phần thép tạo nên 1 ống là

$V = Sl = \pi\left(0,0095^2 - 0,0075^2\right).6 \approx 6,408849013.10^{-4}\,(m^3)$

Khối lượng mỗi ống dài 6m là $V.7800 = 4,99890223 kg$

10 tấn thép nguyên liệu (=10 000 kg) ta được $10000 : 4,99890223 \approx 2000$ ống.

Ví dụ 7. Một tấm vải được quấn 357 vòng quanh một lõi gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng $5,678\,cm$, bề dày của vải là $0,5234mm$. Tính chiều dài (bằng mét) của tấm vải.

(Trích Đề thi HSG MTCT Quảng Trị Năm 2012).

Lời giải và đáp số

Gọi r là bán kính của lõi gỗ; d là độ dày của vải; l_k là chiều dài của vải ở vòng thứ k với $k = 1,...,n$.

Ta có: $l_1 = 2\pi r; l_2 = 2\pi r(r+d); l_3 = 2\pi r(r+2d); ...; l_n = 2\pi\left[r+(n-1)d\right]$

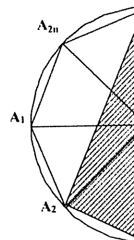
Tổng chiều dài của n vòng:

$$S = l_1 + l_2 + ... + l_n = 2\pi\left[nr + (1+2+...+n-1)d\right]$$

$$= 2\pi\left[nr + \frac{(n-1)n}{2}d\right] = \pi n\left[2r + (n-1)d\right]$$

Thay $n = 357$, $r = 0,05678$; $d = 0,0005234$ ta được $S \approx 336,3417(m)$

Ví dụ 8. Công ty muốn trang trí cho nền phòng khách bằng đá hoa cương hình đa giác đều $A_1A_2A_3...A_{2n}$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính bằng $\frac{6}{\pi}$ (m). Để ghi nhớ kỷ niệm 12 năm thành lập, công ty muốn đa giác đều phải có số cạnh sao cho số tam giác có đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, A_3,...,A_{2n}$ phải gấp 12 lần số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, A_3,...,A_{2n}$. Tính diện tích đa giác cần trang trí.



(Trích Đề thi HSG MTCT Đồng Tháp 2012).

Lời giải và đáp số

Số tam giác có đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, A_3,\ldots,A_{2n}$ là: C_{2n}^3

Số hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, A_3,\ldots,A_{2n}$ là: C_n^2.

Theo đề ta có $C_{2n}^3 = 12C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = 12\dfrac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 5$.

Vậy đa giác đều cần trang trí là thập giác đều.

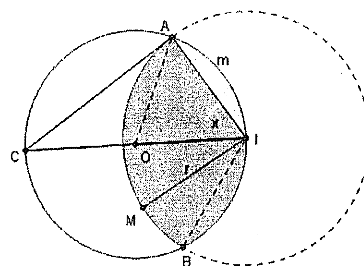
Diện tích thập giác đều là: $S = 10.\dfrac{1}{2}.\dfrac{6}{\pi}.\dfrac{6}{\pi}.\sin(36^0) \approx 10,71991755(m^2)$

Ví dụ 9. Một người nông dân có một cánh đồng cỏ bán kính $R = 100m$, đầy cỏ không có khoảng trống nào. Ông ta buộc một con bò vào một cây cọc trên mép cánh đồng. Hãy tính chiều dài đoạn dây buộc sao cho con bò chỉ ăn được đúng một nửa cánh đồng.

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2007).

Lời giải và đáp số

Gọi I là vị trí cọc cắm trên mép cánh đồng, r là độ dài dây buộc bò, M là vị trí xa nhất con bò có thể gặm cỏ. Như vậy vùng con bò chỉ có thể ăn cỏ là phần giao giữa hai hình tròn $(O;R)$ và (I,r). Theo giả thiết, diện tích phần giao này bằng một nửa diện tích hình tròn $(O;R)$.



Gọi x (radian) là số đo của góc $\widehat{CIA}$, $\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $r = 2R\cos x$.

Diện tích hình quạt IAB: $\dfrac{\pi r^2}{2\pi}.2x = r^2x = 4R^2x\cos^2 x$.

Diện tích hình viên phân IAm: $\dfrac{\pi R^2}{2\pi}(\pi - 2x) - \dfrac{1}{2}R^2\sin(\pi - 2x)$.

Diện tích phần giao của hai đường tròn là $S = 4R^2x\cos^2 x + R^2(\pi - 2x) - R^2\sin 2x$

Theo đề ta có:

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2 \Leftrightarrow 4R^2x\cos^2 x + R^2(\pi - 2x) - R^2\sin 2x = \frac{1}{2}\pi R^2$$

$$\Leftrightarrow 4x\cos^2 x + (\pi - 2x) - \sin 2x = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow 2x\cos 2x - \sin 2x + \frac{\pi}{2} = 0$$

Dùng chức năng SHIFT CALC để giải phương trình trên với giá trị ban đầu 0,5 màn hình hiển thị 0,952847864 ta ấn tiếp AC Ans = ta được kết quả $x \approx 0,9528478647$. Do đó: $r = 200\cos(0,9528478647) \approx 115,8728473\,m$.

Ví dụ 8. Thể tích V của 1kg nước ở nhiệt độ T (T nằm giữa 0^0 và 30^0) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3\ (cm^3)$

Ở nhiệt độ nào nước có khối lượng riêng lớn nhất.

Lời giải và đáp số

$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3, T \in (0^0;30^0)$

$V'(T) = -0,06426 + 2.0,0085043T - 3.0,0000679T^2$

$$V'(T) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T \approx 79,5318 \notin (0^0;30^0) \\ T \approx 3,9665 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

T	0°		3,9665°		30°
V'(T)		-	0	+	
V(T)	↘		V_{min}	↗	

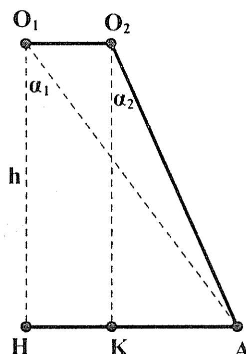
Vậy ở nhiệt độ $T \approx 3,9665\ (^0C)$ thì nước có khối lượng riêng lớn nhất.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Một máy báy đang bay với vận tốc $v = 256km/h$ theo phương nằm ngang. Tính xem máy bay đang ở độ cao nào, biết rằng khi đang ở vị trí O_1 thì phi công nhìn thấy một vật cố định A dưới mặt đất theo góc $\alpha_1 = 25^0 38'28"$ so với phương thẳng đứng và sau đó 15 giây, máy bay đến vị trí O_2 phi công lại nhìn thấy vật cố định A theo góc $\alpha_2 = 14^0 55'53"$ so với phương thẳng đứng?

(Trích Đề Thi HSG MTCT Huế 2011)

Lời giải và đáp số



Ta có: $O_1O_2 = \frac{256 \times 15}{3600} = \frac{16}{15}(km)$

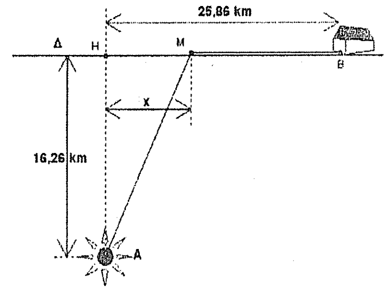
$\widehat{O_1AO_2} = \alpha_1 - \alpha_2$; $\widehat{O_1O_2A} = 90^0 + \alpha_2$

Trong tam giác O_1O_2A ta có

$$\frac{O_1O_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{O_1A}{\sin(90^0 + \alpha_2)} \Rightarrow O_1A = \frac{O_1O_2 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Suy ra: $h = O_1A\cos\alpha_1 = \dfrac{O_1O_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \approx 4,99993\text{km} \approx 5\ 000\text{m}$

BT 2. Một nhân viên gác ở trạm hải đăng trên biển (điểm A), cách bờ biển là 16,28 km, muốn vào đất liền để đến ngôi nhà bên bờ biển (điểm B) bằng phương tiện ca nô vận tốc 8km/h cập bờ sau đó đi tiếp bằng xe đạp với vận tốc 12km/h. Hỏi ca nô phải cập bờ tại điểm M nào để thời gian dành cho lộ trình di chuyển bé nhất? (Giả thiết rằng thời tiết tốt, độ dạt ca nô khi di chuyển không đáng kể).



(Đề Thi HSG MTCT Huế 2005)

Lời giải và đáp số

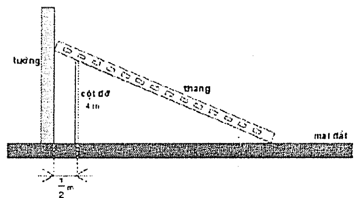
Thời gian lộ trình:

$$f(x) = \frac{\sqrt{16,26^2 + x^2}}{8} + \frac{25,86 - x}{12}, (0 < x < 25,86)$$

$$f'(x) = \frac{3x - 2\sqrt{16,26^2 + x^2}}{24\sqrt{16,26^2 + x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \times 16,26}{\sqrt{5}} \approx 14,54338613$$

Do đó: $t_{min} \approx 3,669936055(s)$.

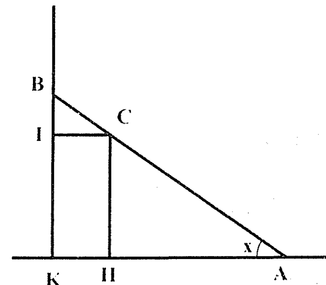
BT 3. Tìm chiều dài bé nhất của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4m, song song và cách tường 0,5m kể từ tim cột đỡ. (Hình vẽ).



(Trích Đề HSG MTCT Tuyên Quang 2011).

Lời giải và đáp số

Cho $AB = l$ là chiều dài của thang, HC = 4m là cột đỡ, C giao của cột đỡ và thang, x là góc giữa thang và mặt đất. Ta có:



$$AB = AC + CB = \frac{CH}{\sin x} + \frac{CI}{\cos x}$$

$$f(x) = AB = \frac{4}{\sin x} + \frac{1}{2\cos x}, x \in (0; 90^0)$$

$$f'(x) = \frac{-8\cos^3 x + \sin^3 x}{2\sin^2 x\cos^2 x}\ ;$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 2 \Leftrightarrow x_0 = \tan^{-1}(2) \approx 63^0 26'6''$

$AB_{min} = \text{Min } f(x) = f(x_0) \approx 5,5902$ (m).

BT4. Khi sản xuất vỏ hộp sữa bột hình trụ, người ta luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Hãy tính gần đúng diện tích toàn phần của một vỏ hộp sữa bột được làm theo nguyên tắc như trên khi ta muốn thể tích của hộp là $889cm^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi r và h là bán kính và chiều cao hộp sữa.

Ta có: $V = \pi r^2 h$; $S_{TP} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

Suy ra: $S_{TP} = 2\pi r^2 + 2V / r$.

Khảo sát hàm số ta tìm được r để S_{TP} nhỏ nhất: $r = \sqrt[3]{V / 2\pi}$

Đáp số: $S_{TP} \approx 511,8182$ cm^2

BT 5. Giả sử một phi hành gia đang lơ lửng trên đường nối liền giữa A là tâm của trái đất (bán kính a) và B là tâm của mặt trăng (bán kính b). Cho $l = AB$. Xác định tọa độ của phi hành gia (trên trục có gốc A và đi qua B, hướng AB) sao cho tổng diện tích của phần trái đất và mặt trăng ông ta có thể quan sát được lớn nhất. Biết rằng diện tích của chỏm cầu nhìn được là $2\pi rh$ với r là bán kính hành tinh quan sát và h là chiều cao của chỏm cầu. Cho bán kính trái đất là $a \approx 6400km$ và bán kính mặt trăng là $b \approx 1740km$, khoảng cách từ mặt trăng đến mặt đất là khoảng 384000km (tức khoảng cách ngắn nhất từ một điểm trên mặt đất đến một điểm trên bề mặt của mặt trăng, hai điểm này ở trên đường thẳng AB).

Ghi chú: Khi cắt một hình cầu bởi một mặt phẳng, ta được hai chỏm cầu ở hai phía mặt cắt. Chiều cao của chỏm cầu bằng khoảng cách giữa mặt phẳng cắt và mặt tiếp diện của chỏm cầu song song với mặt cắt.

(Trích Đề thi HSG MTCT Phú Yên 2010)

Hướng dẫn giải

Gọi $\overline{AM} = x$ là tọa độ của phi hành gia tại điểm M trên trục AB

Ta có $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AM} \Rightarrow AH = \frac{a^2}{x} \Rightarrow h = a - \frac{a^2}{x}$

Diện tích của khối chỏm cầu mà phi hành gia thấy được của trái đất là:

$$S_1 = 2\pi ah = 2\pi a\left(a - \frac{a^2}{x}\right)$$

Diện tích của khối chỏm cầu mà phi hành gia thấy được của mặt trăng là:

$$S_2 = 2\pi b\left(b - \frac{b^2}{l - x}\right)$$

Diện tích khối chỏm cầu của phần trái đất và mặt trăng mà phi hành gia có thể quan sát được là $S = S_1 + S_2$

$$S = 2\pi a\left(a - \frac{a^2}{x}\right) + 2\pi b\left(b - \frac{b^2}{1-x}\right), 0 < x < 1$$

$$S'(x) = \frac{2\pi a^3}{x^2} - \frac{2\pi b^3}{(1-x)^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow (a^3 - b^3)x^2 - 2la^3x + a^3l^2 = 0 \ (*)$$

Thay các giá trị $a, b, l = 384000 + 6400 + 1740 = 392140(km)$

Giải phương trình (*) ta được:

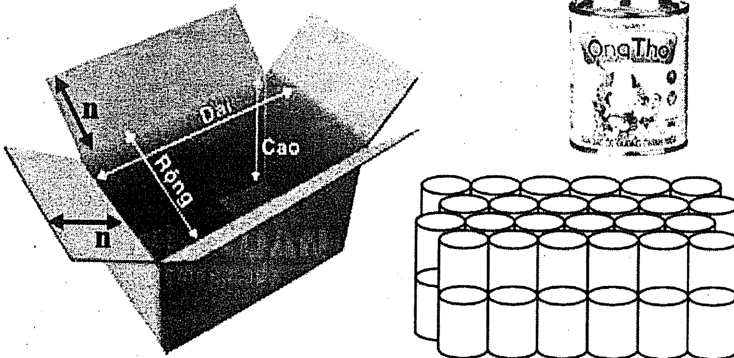
$x_1 \approx 456911,8555$ (loại vì $x_1 > 1$), $x_2 = 343452,1938 < 1$

Đáp số: $343452,1938$ (km), $MaxS = S(x_2) = 27090684,5 \ km^2$

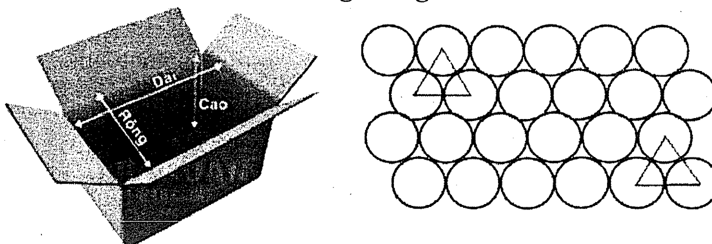
Bài 6. Một thùng giấy hình hộp chữ nhật có nắp để đựng vừa đủ 48 hộp sữa có dạng hình trụ, các hộp sữa được xếp thành hai lớp, mỗi lớp 24 lon, các hộp sữa được xếp khít nhau và xen kẽ như hình vẽ. Biết hộp sữa có đường kính đáy bằng chiều cao và bằng 10cm, nắp của thùng giấy n bằng một nửa chiều rộng thùng. Tính gần đúng :

1. Chiều dài, chiều rộng và chiều cao của cái thùng
2. Số mét vuông của cái thùng.

(Đề thi HSG MTCT An Giang 2012 Khối THCS)



Hướng dẫn giải



Chiều dài thùng: $60\text{cm}+5\text{cm}=65\text{cm}$

Chiều cao của tam giác đều 10cm là $10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ cm

Chiều rộng của cái thùng: $\left(3\times5\sqrt{3}+10\right)\text{cm}$

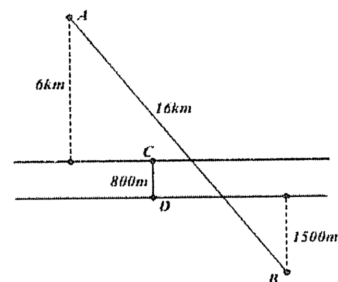
Chiều cao thùng: 20cm

Giấy làm thùng một hình chữ nhật có chiều dài là $\left(65+15\sqrt{3}+10\right)\times2\text{cm}$

Chiều rộng giấy là: cao + rộng $20+\left(15\sqrt{3}+10\right)=30+15\sqrt{3}$

Vậy diện tích bề mặt giấy: $\left(75+15\sqrt{3}\right)\times2\times\left(30+15\sqrt{3}\right)\approx11305{,}96004$.

BT 7. Hai thành phố A và B nằm ở hai phía khác nhau của một con sông thẳng, lòng sông rộng 800m, thành phố A ở bên phía phải cách bờ 6km và cách thành phố B theo đường chim bay 16km; thành phố B cách bờ trái 1500m. Người ta muốn xây một cây cầu CD vuông góc với bờ sông sao cho quãng đường bộ từ A đến B (độ dài đường gấp khúc ACDB) là ngắn nhất. Tính độ dài quãng đường đó.



(Trích Đề thi HSG MTCT Quãng Ninh 2012)

Hướng dẫn giải

Gọi A' là ảnh của A qua phép tính tiến $\overrightarrow{CD}$.

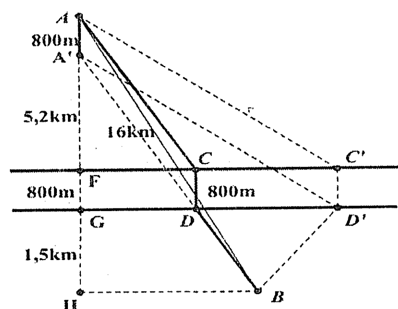
Khi đó đầu cầu $D=A'B$ giao bờ phía B.

Thật vậy, mọi vị trí đặt cây cầu D'C', ta có

$$\begin{aligned}&AC'+C'D'+D'B=A'D'+CD+D'B\\&\geq A'B+CD=A'D+DB+CD\\&=AC+CD+DB=\text{const}\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow D'\equiv D$.

Vậy để quãng đường bộ từ A đến B là ngắn nhất thì đầu cầu D xác định như trên.



Ta có: $HB=\sqrt{AB^2-HA^2}$; $A'B=\sqrt{A'H^2+HB^2}$

Quãng đường cần tìm là: $s=A'B+CD=16{,}4\text{km}$

BT 8. Công ty Hoa Hồng thông báo quy định về trả tiền cho một trò chơi trên máy tính như sau

A. Bạn phải trả 21 000 đồng với bất kỳ lượng thời gian nào mà bạn chơi trò chơi.

B. Bạn phải trả 5 000 đồng khi đồng ý chơi trò chơi và bạn phải trả thêm 1 500 đồng cho mỗi phút chơi trò chơi.

C. Bạn phải trả 3 000 đồng cho mỗi phút chơi trò chơi

D. Bạn phải trả 15 000 khi đồng ý chơi trò chơi và bạn phải trả thêm 250 đồng cho mỗi phút chơi trò chơi.

Hãy cho biết bạn sẽ chơi trò chơi trên máy tính của công ty đó theo hình thức nào? (Hãy ghi chữ A hay B hay C hay D vào cột hình thức chọn tương ứng với khoảng thời gian chơi của bạn) để phải trả ít tiền nhất nếu

Thời gian chơi	**Hình thức chọn**
1) bạn chơi với thời gian chơi không quá 3 phút	
2) Bạn chơi với thời gian từ 3 phút 30 giây đến 5 phút	
3) Bạn chơi với thời gian từ 6 đến 8phút	
4) Bạn chơi với thời gian từ 8 phút 30 giây đến 23 phút	
5) Bạn chơi với thời gian từ 24 phút đến 60 phút	

Hướng dẫn giải

Gọi số tiền phải trả là y (tính theo 1 000) và thời gian chơi được là x (phút) thì mỗi hình thức thuê máy nói trên thì bạn phải trả tiền tương ứng như sau:

A. $y = 21$ B. $y = 5 + 1{,}5x$ C. $y = 3x$ D. $y = 15 + 0{,}25x$

Vẽ đồ thị các hàm số bậc nhất trên cùng một hệ trục tọa độ

Sử dụng MTCT để tìm tọa độ giao điểm của các cặp đường thẳng biểu diễn số tiền phải trả

So sánh số tiền tương ứng với khoảng thời gian chơi được kết quả là

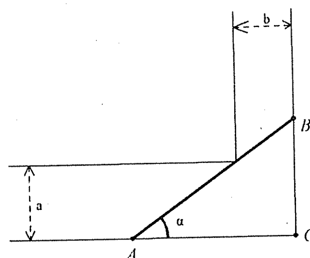
1)	2)	3)	4)	5)
C	B	B	D	A

BT 9. Trong một khúc cua (rẽ) thẳng góc hợp bởi hai con đường có chiều rộng $a = 8m$ và $b = 6m$ vuông góc với nhau. Tìm chiều dài của một khúc cây thẳng AB có thể đi qua khúc cua.

Nếu thay vì chiều dài khúc cây, bây giờ một chiếc xe có bề ngang $u = 4m$. Tính chiều dài tối đa của xe để xe đó có thể vượt qua khúc cua.

Lời giải và đáp số

Gọi α là góc hợp bởi đoạn AB với AC. Ta có:



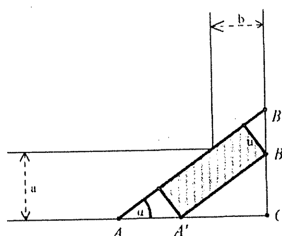
$$p(\alpha) = AB = \frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$p'(\alpha) = \frac{b\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{b\sin^3\alpha - a\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$$

$$p' = 0 \Leftrightarrow b\sin^3\alpha - a\cos^3\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$\alpha_0 = \tan^{-1}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right).$$



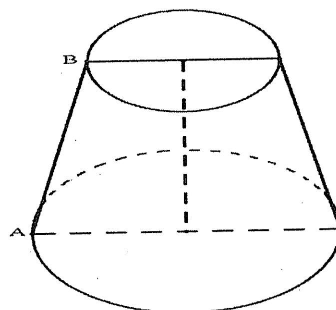
Suy ra chiều dài khúc cây thẳng AB dài nhất có thể đi qua khúc cua là:

$$p_{max} = \frac{8}{\sin\alpha_0} + \frac{6}{\cos\alpha_0} \approx 19,73133 \text{ (m)}$$

Trường hợp chiếc xe hình chữ nhật có bề ngang $u = 4m$ cũng giống như trường hợp khúc cây thẳng AB và chiều dài của xe tối đa là bằng đoạn A'B':

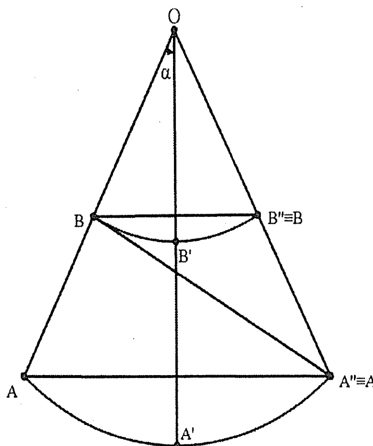
$$p_1 = A'B' = AC - \frac{u}{\tan\alpha_0} - u\tan\alpha_0 \approx 11,69451 \text{ (m)}$$

BT 10. Có một cái cốc úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của cốc là 20cm, bán kính đáy cốc là 3cm, bán kính miệng cốc là 4cm. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Tính quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình.



Lời giải và đáp số

Đặt b, a, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB'' = 4\pi b$ và cung lớn $AA'' = 4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA".

Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$l = \sqrt{BO^2 + OA''^2 - 2BO.OA''.\cos 2\alpha}$ (1). $l \approx 47,2714cm$

$B''A'' = AB = \sqrt{(a-b)^2 + h^2}$.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{4\pi a}{4\pi b} = \dfrac{l(\overset{\frown}{BB''})}{l(\overset{\frown}{AA''})} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OB+AB}{OB} = 1 + \dfrac{AB}{\frac{2\pi b}{\alpha}} = 1 + \dfrac{AB.\alpha}{2\pi b}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi(a-b)}{AB} = \dfrac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2+h^2}}$ (a).

$\dfrac{AB}{OB} = \dfrac{a}{b} - 1 = \dfrac{a-b}{b} \Rightarrow OB = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}$ (b).

$OA'' = OB + BA = \dfrac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b} + \sqrt{(a-b)^2+h^2}$ (c).

Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được l.

Ghi chú. *Để tồn tại lời giải trên thì đoạn BA" phải không cắt cung $\overset{\frown}{BB''}$ tại điểm nào khác B, tức là BA" nằm dưới tiếp tuyến của $\overset{\frown}{BB''}$ tại B. Điều này tương đương với $2\alpha < \cos^{-1}(\frac{b}{a})$. Tuy nhiên, trong lời giải của thí sinh không yêu cầu phải trình bày điều kiện này (và đề bài cũng đã cho thỏa mãn yêu cầu đó).*

BT 12. Lưu lượng xe ôtô vào đường hầm được cho bởi công thức

$$f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264} \text{ (xe/giây)}$$

Trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Lời giải và đáp số

$$f(v)=\frac{290,4v}{0,36v^2+13,2v+264}$$

Ta có

$$f'(v)=290,4.\frac{-0,36v^2+264}{\left(0,36v^2+13,2v+264\right)^2},\ v>0$$

$$f'(v)=0\Leftrightarrow v=\frac{\sqrt{264}}{0,6}$$

f đạt giá trị lớn nhất khi $v=\dfrac{\sqrt{264}}{0,6}\approx 27,08(km/h)$

$$f\left(\frac{\sqrt{264}}{0,6}\right)\approx f(27,08)\approx 8,9$$

BT 13. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB = 5km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h. Xác định vị trí điểm M để người đến kho nhanh nhất.

Lời giải và đáp số

Đặt $x = BM,\ 0\le x\le 7$. Khi đó

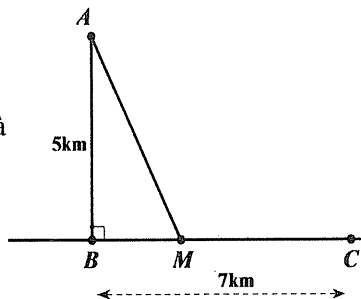
$AM=\sqrt{x^2+25},\ MC=7-x$.

Thời gian người canh hải đẳng đi từ A đến C là

$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+25}}{4}-\frac{7-x}{6}$$

Hàm số T đạt giá trị nhỏ nhất tại

$x=2\sqrt{5}\approx 4,472(km)$.



Chủ đề 8:

SỐ HỌC

1. Modulo

a) **Định nghĩa:** Hai số a và b được gọi là bằng nhau theo modulo n nếu a và b có cùng số dư khi chia cho n. Hay nói cách khác là $(a-b)$ chia hết cho n. Chúng ta sẽ viết: $a \equiv b \pmod{n}$.

Ví dụ: $5 \equiv 9 \pmod{2}; -1 \equiv 3 \pmod{2}; -2 \equiv -8 \pmod{2}$. Rõ ràng thử modulo 2 thì một số a bất kỳ sẽ hoặc là $a = 0 \pmod{2}$ khi nó chẵn, hoặc là $a \equiv 1 \pmod{2}$ khi nó lẻ.

Một vài ví dụ khác:

$0 \equiv 3 \equiv 6 \equiv 9 \equiv -3 \equiv -6 \pmod{3}$

$1 \equiv 4 \equiv 7 \equiv -2 \equiv -5 \pmod{3}$

$0 \equiv 4 \equiv 8 \equiv -4 \pmod{4}$

$1 \equiv 5 \equiv -3 \equiv -7 \pmod{4}$

b) Các tính chất:

- Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ và $x \equiv y \pmod{n}$ thì $a \pm x \equiv b \pm y \pmod{n}$

  Đặc biệt: Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ thì $a \pm z \equiv b \pm z \pmod{n}$
- Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ và $x \equiv y \pmod{n}$ thì $a \times x \equiv b \times y \pmod{n}$

  Đặc biệt: $a \equiv b \pmod{n}$ thì $a \times z \equiv b \times z \pmod{n}$
- Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ thì $a^k \equiv b^k \pmod{n}$

2. Số nguyên tố

- Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có thể phân tích thành thừa số nguyên tố
- Số tự nhiên nếu là hợp số thì ước nguyên tố nhỏ nhất của n không vượt quá $\sqrt{n}$. Do đó số tự nhiên n không có ước dương từ 2 đến $\left[\sqrt{n}\right]$ thì n chính là số nguyên tố.
- Giả sử số tự nhiên n phân tích thành thừa số nguyên tố như sau: $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}....p_k^{\alpha_k}$ $(\alpha_i, i \in \mathbb{N}^*, p_i$ là các số nguyên tố) được gọi là dạng phân tích tiêu chuẩn, và mang tính duy nhất.

3. Định lý nhỏ Fermat

- Định lý: Cho p là số nguyên tố, a là số nguyên $\Rightarrow a^p - a \equiv 0 \pmod{p}$
- Hệ quả: Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên sao cho $(a,p) = 1$ thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Khi đó, số các ước nguyên dương của n được tính theo công thức: $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_k+1)$; và tổng các ước dương của n được tính theo công thức: $\left(\dfrac{p_1^{\alpha_1+1}}{p_1-1}\right)\left(\dfrac{p_2^{\alpha_2+1}}{p_2-1}\right)...\left(\dfrac{p_k^{\alpha_k+1}}{p_k-1}\right)$

4. Kiến thức máy tính

a) Tìm thương và dư của một phép chia các số tự nhiên

Trong trường hợp số tự nhiên a không chia hết cho số tự nhiên b, để tìm thương và số dư ta ấn như sau:

- Bước 1: Nhập số a
- Bước 2: Ấn [ALPHA] [▭] $(\div R)$
- Bước 3: Nhập số chia b và ấn phím [=]

Ví dụ: Tìm thương và số dư khi chia 366789 cho 4

Hướng dẫn thực hành

Ghi vào màn hình: $366789 \div R4$ bằng cách:

[3] [6] [6] [7] [8] [9] [ALPHA] [▭] [4]

Ấn [=] ta được kết quả: Thương 91697 và dư $R = 1$

366789÷R4

91697, R=1

b) Tìm ước chung lớn nhất (GCD) của hai số

Để tìm UCLN của hai số a và b ta ghi vào màn hình $GCD(a,b)$, sau đó ấn phím [=]

Ví dụ: Tìm ước chung lớn nhất của 180 và 24.

Hướng dẫn thực hành

Ghi vào màn hình: $GCD(180,24)$ bằng cách:

[ALPHA] [×] [1] [8] [0] [SHIFT] [)] [2] [4] [)]

Ấn [=] ta được kết quả là 12.

GCD(180,24)

12

Lưu ý: UCLN của ba số được xác định như sau:

$$GCD(a,b,c) = GCD(GCD(a,b),c)$$

c) Tìm bộ số chung nhỏ nhất (LCM) của hai số

Để tìm BCNN của hai số a và b ta ghi vào màn hình $\text{LCM}(a,b)$, sau đó ấn phím [=]

$$\text{LCM}(a,b,c) = \text{LCM}(\text{LCM}(a,b),c)$$

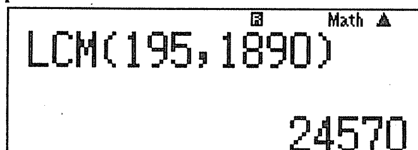
Ví dụ: Tìm bội chung nhỏ nhất của 195 và 1890

Hướng dẫn thực hành

Ghi vào màn hình $\text{LCM}(195,1890)$ bằng cách:

[ALPHA] [÷] [1] [9] [5] [SHIFT] [)] [1] [8] [9] [0] [)] [=]

Ấn [=] ta được kết quả: 24570



d) Phân tích một số thành thừa số nguyên tố

Số nguyên tố là số tự nhiên chỉ chia hết cho 1 và chính nó. Ngoài ra nó không chia hết cho bất cứ số nào khác. Số 0 và 1 không được coi là số nguyên tố.

Để phân tích một số a theo thừa số nguyên tố ta làm như sau:

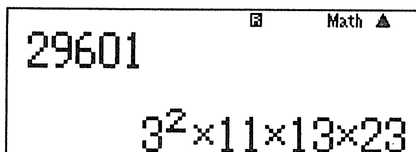
a [=] [SHIFT] [°'''] (FACT)

Ví dụ: Phân tích số 29601 ra thừa số nguyên tố

Hướng dẫn thực hành

Ấn: [2] [9] [6] [0] [1] [=] [SHIFT] [°''']

Ta được kết quả: $29601 = 3^2 \times 11 \times 13 \times 23$



I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ1. Tìm 5 chữ số tận cùng của 5^{2013} .

(Trích đề thi HSG MTCT Sóc Trăng THPT, 28/12/2008)

Lời giải và đáp số

Tính bằng máy: $5^{10} = 9765625 \Rightarrow 5^{10} \equiv 65625 (\text{mod } 100000)$

$5^{20} \equiv 65625^2 \equiv 40625 (\text{mod} 100000)$

$5^{40} \equiv 40625^2 \equiv 90625 (\text{mod} 100000)$

$5^{80} \equiv 90625^2 \equiv 90625 (\text{mod} 100000)$

$\Rightarrow 5^{40} \equiv 5^{80} \equiv ... \equiv 5^{40k} (\text{mod} 100000)$

$\Rightarrow 5^{2000} \equiv 5^{40} \equiv 90625 (\text{mod} 100000)$

$5^{13} \equiv 03125 \pmod{100000}$

$5^{2013} = 5^{2000} \times 5^{13} \equiv 90625 \times 03125 \equiv 03125 \pmod{100000}$

Vậy 5 chữ số tận cùng của 5^{2013} là 03125.

Ví dụ 2. Tìm số lớn nhất và số nhỏ nhất trong các số tự nhiên có dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 7.

Lời giải và đáp số

Nhận xét:

Cho một số A bất kì, giả sử $A \equiv a \pmod 7$ thì:

$A + 10 \equiv a + 3 \pmod 7$, $A + 20 \equiv a + 6 \pmod 7$,

$A + 30 \equiv a + 2 \pmod 7$, $A + 40 \equiv a + 5 \pmod 7$,

$A + 50 \equiv a + 1 \pmod 7$, $A + 60 \equiv a + 4 \pmod 7$

Vì khi chia các số $A,\ A+10,\ A+20,\ A+30,\ A+40,\ A+50,\ A+60$ ta được 7 số dư với các giá trị khác nhau do đó có một số chia hết cho 7 (*).

Áp dụng (*) cho các số 1929394, 1919384, 1919374, 1919364, 1919354, 1919344, 1919334 ta có một số chia hết cho 7 và đó là số lớn nhất chia hết cho 7 có dạng $\overline{1x2y3z4}$

Dùng máy ta tính được:

1929394÷7=275627,7143; 1929384÷7=275626,2857

1929374÷7=275624,8571; 1929364÷7=275623,4286

1929354÷7=275622

Vậy số lớn nhất dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 7 là 1929354.

Áp dụng (*) cho các số 1020304,1020314,1020324,1020334,1020354,1020364 ta có một số chia hết cho 7 và đó là số nhỏ nhất chia hết cho 7 có dạng $\overline{1x2y3z4}$

Dùng máy ta tính được:

1020304÷7=145757,7143; 1020314÷7=145759,1429

1020324÷7=145760,5714; 1020334÷7=145762

Vậy số nhỏ nhất dạng $\overline{1x2y3z4}$ chia hết cho 7 là 1020334.

Đáp số: 1929354; 1020334

Lưu ý: Có thể dò tìm số lớn nhất bằng cách cho $x = 9, y = 9$ và z giảm dần từ 9 đến 0, dò số nhỏ nhất bằng cách cho $x = 0, y = 0$ và z tăng dần từ 0 đến 9 mà không phải lý luận gì thêm.

Ví dụ 3. Tìm các ước nguyên tố nhỏ nhất và lớn nhất của số $215^2 + 314^2$

Lời giải và đáp số

Tính $215^2 + 314^2$ nhớ vào B.

Ghi vào màn hình $215^2 + 314^2$ ấn [SHIFT] [RCL] [°,,,]

Thử $B \div 2$, $B \div 3$ đều được kết quả không phải là số nguyên $\Rightarrow$ B không chia hết cho 2 và 3. Ta biết các số nguyên tố khác 2 và 3 đều có dạng $6n \pm 1$(điều ngược lại chưa hẳn đúng)

Nhớ $0 \rightarrow A$ bằng cách: [0] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Ghi vào màn hình: $A = A + 1 : B \div (6A + 1) : B \div (6A - 1)$

Ấn [CALC], lặp lại phím [=] cho đến khi $B \div (6A + 1)$ hoặc $B \div (6A - 1)$ có giá trị nguyên thì dừng. Ta được giá trị nguyên đầu tiên là 1493.

Ta có: $B \div 1493 = 97 \Rightarrow B = 1493 \times 97$

Thử lại thấy 1493 và 97 đều là số nguyên tố.

Vậy, ước nguyên tố nhỏ nhất là 97, ước nguyên tố lớn nhất là 1493.

Ví dụ 4. Tìm 11 số tự nhiên liên tiếp có tổng các bình phương của chúng là một số chính phương nhỏ hơn 10000.

Lời giải và đáp số

Đặt $S = n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (n+10)^2 = \sum_{i=n}^{n+10} i^2$

Ta có: $11n^2 < S < 10000 \Rightarrow n < \sqrt{10000 \div 11} = 30{,}15113446$

Do n là số tự nhiên nên $n \le 30$

Thực hiện quy trình sau:

Nhớ $30 \rightarrow A$ bằng cách: [3] [0] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Ghi vào màn hình: $\sqrt{\sum_{x=A}^{A+10} (X)^2} : A = A - 1$ bằng cách

[√■] [SHIFT] [log■□] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [ALPHA] [(−)] [▲] [ALPHA] [(−)] [+] [1] [0] [▶] [▶] [ALPHA] [∫■□] [ALPHA] [(−)] [ALPHA] [CALC] [ALPHA] [(−)] [−] [1]

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi A=0. Mỗi lần lặp nếu $\sqrt{\sum_{x=A}^{A+10} (X)^2}$ nhận giá trị nguyên thì nhận A. Khi $A = A - 1 = 18$ ta được $\sqrt{\sum_{x=A}^{A+10} (X)^2} = 77$

Math ▲Disp

$\sqrt{\sum_{x=A}^{A+10} (X^2)}$

77

Vậy 11 chữ số cần tìm là: 18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28

Ví dụ 5. Tìm số tự nhiên n biết tổng các chữ số của n là $n^2-1999n+28$

Lời giải và đáp số

Ta có tổng các chữ số của n luôn lớn hơn 0 nên $n^2-1999n+28>0(*)$

Vào chức năng giải bất phương trình bậc hai một ẩn: MODE ▼ 1 1 1

Nhập các hệ số: 1 = − 1 9 9 9 = 2 8 =

Ấn = ta được: $n\le 0{,}014007102$ hoặc $n\ge 1998{,}985993$ (1)

Mặt khác: tổng các chữ số của n luôn nhỏ hơn hoặc bằng n nên

$n^2-1999n+28\le n \Leftrightarrow n^2-2000n+28\le 0$ (**)

Tương tự, dùng máy tính giải (**), ta được: $0{,}014000099\le n\le 1999{,}986$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra n = 1999

Vậy n = 1999.

Ví dụ 6. Số 19^{9^9} có bao nhiêu chữ số ?

Lời giải và đáp số

Số chữ số của 19^{9^9} là $\left[\log 19^{9^9}\right]+1=\left[9^9\log 19\right]+1$

Dùng máy thực hiện phép tính $\left[9^9\log 19\right]$ ta được kết quả là 495415345,4

$\Rightarrow\left[9^9\log 19\right]=495415345\Rightarrow\Rightarrow\left[9^9\log 19\right]+1=495415346$

Vậy Số 19^{9^9} có 495415346 chữ số

Ví dụ 7. Tìm chữ số thập phân thứ 2008 sau dấu phẩy của $\frac{10}{97}$ khi biểu diễn kết quả phép chia $10\div 97$ dưới dạng số thập phân.

Lời giải và đáp số

Số thập phân thứ 2008 cũng chính là số thập phân đầu tiên của phép chia $A=10^{2008}$ cho 97

Trước tiên ta tìm số dư của phép chia $A=10^{2008}$ cho 97

Ta có: $A=10^{2008}=100^{1004}=(97+3)^{1004}$

Suy ra dư của $10^{2008}\div 97$ cũng là dư của $3^{1004}\div 97$

Dùng máy tính kiểm tra ta được: 97 là số nguyên tố.

Áp dụng định lý Fermat, ta được: $3^{96}\equiv 1(\bmod 97)$

Thực hiện phép chia ta được: $1004\div 96$ dư 44

Suy ra dư của $3^{44}\div 97$ cũng là dư của $3^{1004}\div 97$ hay dư của $3^{44}\div 97$ cũng là dư của $10^{2010}\div 97$

Dùng máy tính ta được:

$3^{20} \div 97$ dư 91

$91^2 \times 3^4 \div 97$ dư 6

Suy ra $3^{44} \div 97$ dư $6 \Rightarrow 10^{2010} \div 97$

Thực hiện phép chia 6÷97=0,06185567

Suy ra chữ số số thập phân đầu tiên của phép chia $A = 10^{2008}$ cho 97 là số 0

Vậy chữ số thập phân thứ 2008 sau dấu phẩy của $\frac{10}{97}$ khi biểu diễn kết quả phép chia 10÷97 dưới dạng số thập phân là số 0.

Ví dụ 8. Tìm số tự nhiên n để $a_n = \sqrt[4]{26122008 + 6n}$ $(n \in N; 1000 \le n \le 10000000)$ cũng là một số tự nhiên.

Lời giải và đáp số

Ta có: $1\,000 \le n \le 10\,000\,000$

nên $71,49514892 \le a_n = \sqrt[4]{26122008 + 6n} \le 96,3337656$

Vì a_n là số tự nhiên nên $71 < a_n \le 92$

Mặt khác $a_n = \sqrt[4]{26122008 + 6n}$ nên $n = \frac{a_n^4 - 26122008}{6}$

Quy trình bấm phím như sau:

Đưa $71 \to A$ bằng cách: [7] [1] [SHIFT] [RCL] [(–)]

Ghi vào màn hình: $A = A + 1 : \frac{A^4 - 261222008}{6}$

Ấn [CALC] sau đó lặp lại phím [=] cho đến khi A = 96 thì dừng lại. Chú ý sau mỗi lần bấm "=" thì dừng lại xem phép chia có là số nguyên hay không. Nếu nguyên thì nhận giá trị của n ứng với giá trị đó.

Kết quả: 125308; 1815508; 3944188; 6581332

Vậy các giá trị n cần tìm là 125308; 1815508; 3944188; 6581332

Ví dụ 9. Tìm số tự nhiên A lớn nhất để các số 2915, 2411, 9467 chia cho A ta được cùng 1 số dư. Tìm số A.

Lời giải và đáp số

Ta có 2915, 2411, 9467 chia cho A ta được cùng 1 số dư nên

$2915 = Aq_1 + r_1$; $2415 = Aq_2 + r_1$; $9467 = Aq_3 + r_1$

Ta thấy: $6552 = 9467 - 2915$ chia hết cho A; $504 = 2915 - 2411$ chia hết cho A

$\Rightarrow$ A là ước chung của 504 và 6552

Dùng máy tính ta tìm được UCLN(504,6552) = 504

Do đó: A = 504.

Ví dụ 14. Tìm số dư khi chia $2^1+2^2+2^3+....+2^{2007}$ cho 2007

Lời giải và đáp số

Ta có:

$$A=2^1+2^2+2^3+...+2^{2007}=2\times\left(1+2+2^2+...+2^{2006}\right)=2.\frac{2^{2007}-1}{2-1}=2^{2008}-2$$

Dùng máy tính phân tích thành nhân tử, ta được:

$2007=3^2\times 223$ (223 là số nguyên tố)

Áp dụng định lí Fermat nhỏ, ta có: $2^{222}\equiv 1\left(\text{mod } 223\right)$

Mặc khác $2^6\equiv 1\left(\text{mod } 9\right)$ và $222 \vdots 6$ nên $2^{222}\equiv 1\left(\text{mod } 2007\right)$

Ta có: $2008=9\times 222+10$

nên $2^{2008}\equiv 210\left(\text{mod } 2007\right)$

Suy ra $2^{2008}-2\equiv 2^{10}-2\left(\text{mod } 2007\right)\equiv 1022\left(\text{mod } 2007\right)$

Vậy số dư khi chia $2^1+2^2+2^3+....+2^{2007}$ cho 2007 là 1022.

Ví dụ 15. Ta chia tập hợp số tự nhiên thành các nhóm sau:

(1); $(2,3)$; $(4,5,6)$; $(7,8,9,10)$... trong đó nhóm thứ n gồm n số hạng.

Hãy tính tổng S_{2009} các số trong nhóm thứ 2009.

Lời giải và đáp số

Ghi nhóm dưới dạng tam giác ta được:

1

2 3 (số cuối cùng của hàng 2 là 3 = 1 + 2)

4 5 6 (số cuối cùng của hàng 3 là 6 = 1 + 2 +3)

7 8 9 10 (số cuối cùng của hàng 4 là 10 = 1 + 2 + 3 + 4)

....

suy ra số cuối cùng của hàng 2008 là

$$1+2+3+...+2008=\frac{2008.(2008+1)}{2}$$

Số hạng đầu tiên của nhóm 2009 là $1+\frac{2008.(2008+1)}{2}=2017037$

Suy ra nhóm thứ 2009 gồm 2017037, 2017038,...., 2017037 + 2008

Do đó:

$$S_{2009}=2009\times 2017037+\left(1+2+...+2008\right)=2009\times 2017037+\frac{2008.(2008+1)}{2}$$

Dùng máy tính ta tính được: $S_{2009}=4054244369$

Vậy tổng S_{2009} các số trong nhóm thứ 2009 là $S_{2009} = 4054244369$.

Ví dụ 16. Tìm số có 5 chữ số $\overline{abcde}$ thỏa $\sqrt[3]{\overline{abcde}} = \overline{ab}$

Lời giải và đáp số

Đặt $x = \overline{ab}\,;\, y = \overline{cde}\ \left(10 \le x \le 99; 0 \le y \le 999\right)$

$\Rightarrow \overline{abcde} = 1000x + y$

Suy ra

$$\sqrt[3]{1000x + y} = x \Leftrightarrow 1000x + y = x^3$$
$$\Rightarrow 1000x \le x^3 \le 1000x + 9999$$
$$\Rightarrow 1000x \le x^3 \le 1000x + 9999 < 1100x$$
$$\Rightarrow 1000 \le x^2 < 1100$$
$$\Rightarrow 31,6227766 \le x < 33,1662479$$

Do đó: $x = 32$ hoặc $x = 33$

Với $x = 32$ thì $y = 768$

Với $x = 33$ thì $y = 2937$ (loại)

Vậy số cần tìm là 32768.

Ví dụ 17. Cho hai số tự nhiên a và b thỏa $ab = 455^{12}$ tìm số dư trong phép chia $a + b$ cho 4.

Lời giải và đáp số

Dùng máy phân tích thành nhân tử, ta được: $455=5\times7\times13$

Ta có: $5 = 4 + 1$; $7 = 2\times4 - 1$; $13 = 3\times4 + 1$

Vì a, b là hai số tự nhiên thỏa $ab = 455^{12}$ nên

$$a = \left(4+1\right)^m\left(2\times4-1\right)^n\left(3\times4+1\right)^p;\ b = \left(4+1\right)^x\left(2\times4-1\right)^y\left(3\times4+1\right)^z$$

với $m + x = n + y = p + z = 12$

Ta có: a chia 4 dư $\left(-1\right)^n$, b chia 4 dư $\left(-1\right)^y$

Suy ra a + b chia 4 dư $\left(-1\right)^n + \left(-1\right)^y$

Vì $n + y = 12$ nên n và y cùng tính chẵn lẻ.

Với m lẻ thì dư của phép chia $a + b$ cho 4 là $\left(-1\right) + \left(-1\right) = -2$ tức là dư 2

Với m chẵn thì dư của phép chia $a + b$ cho 4 là $1 + 1 = 2$

Vậy $a + b$ chia 4 dư 2.

Ví dụ 18. Tìm số nhỏ nhất sao cho lập phương số đó là một số có bốn chữ số tận cùng đều là bốn chữ số 3.

Lời giải và đáp số

Quy trình bấm phím như sau:

Ghi vào màn hình: A^3. Dùng CALC để thử ta thấy chỉ có 7 thỏa mãn A^3 tận cùng là 3.

Ghi vào màn hình: $(10A+7)^3$. Dùng CALC để thử ta thấy chỉ có 7 thỏa mãn $(10A+7)^3$ tận cùng là 33.

Ghi vào màn hình: $(100A+7)^3$. Dùng CALC để thử ta thấy chỉ có 4 thỏa mãn $(100A+7)^3$ tận cùng là 333.

Ghi vào màn hình: $(1000A+7)^3$. Dùng CALC để thử ta thấy chỉ có 6 thỏa mãn $(1000A+7)^3$ tận cùng là 3333

Vậy số cần tìm là 6477.

Ví dụ 19. Tìm 5 chữ số đầu tiên (từ bên trái) của số 2008^{2008}.

Phân tích

- Các chữ số đầu tiên (trừ các số 0 ban đầu) của số a và số $a \times 10^{10}$ là như nhau (n là số tự nhiên)

Ví dụ: $a = 0,00003456$ và $a \times 10^{10} = 0,00003456 \times 10^{10} = 345600$ đều có các chữ số đầu tiên (trừ các số 0 ban đầu) là 3456

- Với luồng suy nghĩ đó, ta có thể phân tích 2008^{2008} thành $2008^{2008} = a \times 10^{10}\left(10^n < 2008^{2008}\right)$ thì các chữ số đầu tiên của a cũng là các chữ số đầu tiên của 2008^{2008}.

Lời giải và đáp số

Để tìm n ta cần tìm x sao cho $2008^{2008} = 10^x, \left(n = [x]\right)$

Suy ra $x = 2008\log 2008 = 6631,949527$. Do đó: $n = 6631$

Tiếp theo ta tìm $a \approx 10^{\{x\}} = 10^{x-[x]}$.

Quy trình bấm phím:

Ghi vào màn hình: $2008\log 2008$.

Ấn = ta được: 6631,949527 {giá trị của x}

Ghi vào màn hình: Ans-6631. Ấn = ta được: 0,9495927 {giá trị của {x}}

Ghi vào màn hình: 10^{Ans}. Ấn = ta được: 8,902799854

Vậy, 5 chữ số đầu tiên (từ bên trái) của số 2008^{2008} là 89027.

Ví dụ 20. Tính tổng $S = 3 + 33 + 333 + 3333 + ... + \underbrace{333...333}_{100\ \text{chữ số } 3}$.

Lời giải và đáp số

Ta có

$$S = 3 + 33 + 333 + 3333 + ... + \underbrace{333...333}_{100\ \text{chữ số } 3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(9 + 99 + 999 + 9999 + ... + \underbrace{999...999}_{100\ \text{chữ số } 3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + ... + 10^{100} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{100}\right) - \underbrace{(1 + 1 + 1 + ... + 1)}_{100\ \text{số hạng}}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{10^{101} - 1}{9} - 1 - 100\right) = \frac{10^{101} - 1}{27} - \frac{101}{3}$$

Bài toán tổng quát: Tính tổng $S = k + \overline{kk} + \overline{kkk} + ... + \underbrace{\overline{kkk...kkk}}_{n\ \text{chữ số } k}$, $1 \le k \le 9$

Ta có:

$$S = k + \overline{kk} + \overline{kkk} + ... + \underbrace{\overline{kkk...kkk}}_{n\ \text{chữ số } k}$$

$$= \frac{1}{k}\left(1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{\overline{111...111}}_{n\ \text{chữ số } 1}\right)$$

$$== \frac{1}{k}\left[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + ... + 10^k - 1\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^k\right) - k\right] = \frac{1}{k}\left(\frac{10^{k+1} - 1}{9} - (k+1)\right)$$

Ví dụ 21. Tìm 3 chữ số tận cùng (tính từ bên trái qua) và 3 chữ số đầu (tính từ bên phải qua) của 2014^{2015}.

Lời giải và đáp số

Ta có:

$$2014 \equiv 14 \pmod{1000}$$
$$2014^2 \equiv 196 \pmod{1000}$$
$$2014^3 \equiv 744 \pmod{1000}$$
$$2014^4 \equiv 416 \pmod{1000}$$
$$2014^5 \equiv 824 \pmod{1000}$$

$2014^{10}=\left(2014^{5}\right)^{2}\equiv 824^{2}\equiv 976\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{20}=\left(2014^{10}\right)^{2}\equiv 976^{2}\equiv 576\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{25}=\left(2014^{20}\right)\left(2014^{5}\right)\equiv 576x824\equiv 624\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{50}=\left(2014^{25}\right)^{2}\equiv 624^{2}\equiv 376\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{100}=\left(2014^{50}\right)^{2}\equiv 376^{2}\equiv 376\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{200}=\left(2014^{100}\right)^{2}\equiv 376^{2}\equiv 376\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{400}=\left(2014^{200}\right)^{2}\equiv 376^{2}\equiv 376\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{800}=\left(2014^{400}\right)^{2}\equiv 376^{2}\equiv 376\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{1000}=\left(2014^{800}\right).\left(2014^{200}\right)\equiv 376x376\equiv 376\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{2000}=\left(2014^{1000}\right)^{2}\equiv 376^{2}\equiv 376\left(\bmod 1000\right)$

$2014^{2015}=\left(2014^{2000}\right).\left(2014^{10}\right)\left(2014^{5}\right)\equiv 376x976x824\equiv 224\left(\bmod 1000\right)$

Vậy 3 chữ số cuối (tính từ bên trái qua) của 2014^{2015} là 224 .

Mặt khác: Số các chữ số 2014^{2015} là:

$S\left(A\right)=\left[\log 2014^{2015}\right]+1=2015\left[\log 2014\right]+1=6657+1=6658$ chữ số.

Giả sử A bắt đầu ba chữ số $a_1a_2a_3$. Khi đó ta có

$\overline{a_1a_2a_3}.10^{6655}\leq 2014^{2015}<\left(10.\overline{a_1a_2}+c+1\right).10^{6655}$

$\Rightarrow 6655+\log\overline{a_1a_2a_3}\leq 2015\log 2014<6655+\log\left(10.\overline{a_1a_2}+c+1\right)$

$\Rightarrow\overline{a_1a_2a_3}\leq 10^{2015\log 2014-6655}<10.\overline{a_1a_2}+c+1$

Tính $10^{2015\log 2014-6655}$ ta được 478,4366364 .

Vậy 3 chữ số đầu tiên (tính từ bên trái) của 2014^{2015} là 478

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Tìm ba chữ số cuối cùng bên phải của số: 12^{2008}

Lời giải và đáp số

Ta có: $12^{2008}\equiv 376\times 12^{8}$ (mod 1000)

Dùng máy tính ta tính được: $12^{8}=429981696$

$\Rightarrow 12^{8}\equiv 696$ (mod 1000)

$\Rightarrow 376\times 12^{8}\equiv 376\times 696$ (mod 1000) $\equiv 696$ (mod 1000)

Do đó: $12^{2008}\equiv 696$(mod 1000)

Vậy ba chữ số cuối cùng bên phải của số: 12^{2008} là 696.

BT 2. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất có tính chất: n chia cho 99 dư 1, n chia cho 98 dư 2, n chia cho 97 dư 3, n chia cho 95 dư 4.

Lời giải và đáp số

Nhận xét số nhỏ nhất chia cho 99 dư 1, chia cho 98 dư 2, chia cho 97 dư 3 là 100

Suy ra số n chia cho 99 dư 1, n chia cho 98 dư 2, n chia cho 97 dư 3 có dạng $n = BCNN(97;98;99)\times k + 100$

Dùng máy tính ta tính được:

$BCNN(97;98;99) = 941094 \Rightarrow n = 941094\times k + 100$

Ta có: n chia cho 95 dư 4 nên $n = 95q + 4$

Suy ra $941094\times k + 100 = 95q + 4 \Rightarrow q = \dfrac{941094\times k + 96}{95}$

Nhận xét: $941094\times k + 96$ phải chia hết cho 5 suy ra $941094\times k + 96$ tận cùng là 4 nên $k = 1 + 5l$

Quy trình bấm phím như sau:

Đưa $-4 \to A$ bằng cách: [−] [4] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Ghi vào màn hình: $A = A + 5 : \dfrac{941094A + 96}{95}$

Ấn [CALC] sau đó lặp lại phím [=] cho đến khi phép chia là số nguyên (kết quả phép chia là 901470) thì dừng lại. Khi đó: n=901470×95+4=85639654

Vậy số nhỏ nhất cần tìm là n = 85639654

BT 3. Cho A = 300^{300}. Hỏi:

a) A tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0?

b) Chữ số khác 0 kề trước các chữ số 0 tận cùng của A là chữ số nào?

c) A có bao nhiêu chữ số?

Lời giải và đáp số

a) Ta có: $A = 300^{300} = 3^{300}\times 100^{300} = 3^{300}\times 10^{600}$

$\Rightarrow$ A tận cùng bằng 600 số 0.

b) Chữ số khác 0 kề trước các chữ số 0 tận cùng của A là chữ số tận cùng của 3^{300}

Ta có: $a^{4n+1} \equiv a\pmod{10}$, với mọi số tự nhiên a và n.

$\Rightarrow 3^{297} = 3^{4\times 74+1} \equiv 3\pmod{10}$

$\Rightarrow 3^{300} \equiv 3^4 \pmod{10}$

Ta có: $3^4 = 81$ nên chữ số tận cùng của 3^{300} là 1.

c) Số chữ số của A là kết quả của phép tính: $\left[\log 300^{300}\right] + 1 = \left[300\log 300\right] + 1$

Dùng máy tính ta tính được: 744.

Vậy A có 744 chữ số.

BT 4. Tìm số tự nhiên nhỏ nhất x biết lập phương của nó có tận cùng là bốn chữ số 1.

Lời giải và đáp số

Trước tiên ta tìm chữ số a sao cho a^3 tận cùng là số 1.
Dùng máy tính thử ta chỉ có 1 thỏa mãn yêu cầu

Ta tìm b sao cho $\left(\overline{b1}\right)^3$ tận cùng là 11

Dùng máy tính thử ta chỉ có 71 thỏa mãn yêu cầu

Ta tìm c sao cho $\left(\overline{c71}\right)^3$ tận cùng là 111

Dùng máy tính thử ta chỉ có 471 thỏa mãn yêu cầu

Ta tìm d sao cho $\left(\overline{d471}\right)^3$ tận cùng là 1111

Ta có:

$$\begin{aligned}\left(\overline{d471}\right)^3 &= \left(1000\times a+471\right)^3 \\ &= d^3\times 10^9 + 1413\times d^2\times 10^6 + 665523\times d\times 1000 + 104487111\end{aligned}$$

Suy ra chữ số thứ tư của $\left(\overline{d471}\right)^3$ cũng là chữ số cuối cùng của $3\times d+7$

Ta cần tìm d sao cho chữ số cuối cùng của $3\times d+7$ là 1
Dùng máy tính thử ta chỉ có 8 thỏa mãn yêu cầu
Vậy số cần tìm là 8471.

BT 5. Tìm số dư khi chia $\sum_{i=1}^{2009}\left(1+i^2\right)$ cho 2009.

Lời giải và đáp số

Trước tiên ta tính giá trị của M

Ta có: $M = 2009 + \sum_{i=1}^{2009} i^2$

Biến đổi i^2, ta được:

$$i^2 = \frac{1}{6}\times i\times\left[(i+1)(i+2)-(i-2)(i-1)\right] = \frac{1}{6}i(i+1)(i+2)-(i-2)(i-1)i$$

Áp dụng công thức trên, ta được:

$$1^2 = \frac{1}{6}\times 1\times 2\times 3 - 0$$

$$2^2 = \frac{1}{6}\times 2\times 3\times 4 - 0$$

$3^2 = \frac{1}{6} \times 3 \times 4 \times 5 - \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3$

....

$2007^2 = \frac{1}{7} \times 2007 \times 2008 \times 2009 - \frac{1}{6} \times 2005 \times 2006 \times 2007$

$2008^2 = \frac{1}{6} \times 2008 \times 2009 \times 2010 - \frac{1}{6} \times 2006 \times 2007 \times 2008$

$2009^2 = \frac{1}{6} \times 2009 \times 2010 \times 2011 - \frac{1}{6} \times 2007 \times 2008 \times 2009$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$\sum_{i=1}^{2009} i^2 = \frac{1}{6} \times (2008 \times 2009 \times 2010 + 2009 \times 2010 \times 2011)$$

$$= \frac{2009 \times 2001 \times (2008 + 2011)}{6} = \frac{2009 \times 2010 \times 4019}{6} = 2009 \times 335 \times 4019$$

Dùng máy tính thực hiện phép tính, ta được:

$M = 2009 + 2009 \times 335 \times 4019 = 2704849294$

Ghi vào màn hình : 2704849294÷2009

Bấm [=], ta được: 1346366

Vậy dư của phép chia M chia cho 2009 là 0.

Lời bình: Dùng MTCT ta có thể tìm được kết quả như sau:

Nhập vào màn hình: $\sum_{x=1}^{2009} (X^2) \div R2009$ bằng cách:

[SHIFT] [log□] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [1] [▶] [2] [0] [0] [9] [▶] [ALPHA] [÷R] [2] [0] [0] [9] [=]

Ấn [=] ta được kết quả:

Math ▲

$\sum_{x=1}^{2009} (X^2) \div R2009$

1346365, R=0

Tức dư là 0.

Tuy nhiên lời giải ban đầu vẫn hay và sáng tạo hơn. Kết hợp kiến thức toán và máy tính.

BT 6. Viết số $A = 2007 \times 2008^{2009}$ dưới dạng thập phân phải dùng bao nhiêu chữ số.

Lời giải và đáp số

Số chữ số của A là $\log[A] + 1$

Ta có: $\log[A] + 1 = \log\left[2007 \times 2008^{2009}\right] + 1 = [2009\log 2008 + \log 2007] + 1$

Dùng máy tính ta tính được: 6340

Vậy để viết A dưới dạng thập phân cần 6340 chữ số.

BT 7. Tìm các số nguyên dương thỏa mãn: $c \le b \le a$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$

Lời giải và đáp số

Vì $c \le b \le a$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$ nên $\frac{2001}{3} \le a^3 \le 2001$ vì $c^3 \le \frac{2001}{3}$

Suy ra $9 \le a \le 12$ và $c \le 8$

Với $a = 9$, ta được: $b^3 + c^3 = 1272 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{1272 - c^3}$ (1)

Với $a = 10$, ta được: $b^3 + c^3 = 1001 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{1001 - c^3}$ (2)

Với $a = 11$, ta được: $b^3 + c^3 = 670 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{670 - c^3}$ (3)

Với $a = 12$, ta được: $b^3 + c^3 = 273 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{273 - c^3}$ (4)

Quy trình bấm phím như sau:

Tìm b, c từ phương trình (1)

Đưa $0 \to C$ bằng cách: [0] [SHIFT] [RCL] [hyp]

Ghi vào màn hình: C= C+1: $\sqrt[3]{1272 - C^3}$: $\sqrt[3]{1001 - C^3}$: $\sqrt[3]{1001 - C^3}$: $\sqrt[3]{273 - C^3}$

Ấn [CALC] và lặp lại phím [=] cho đến khi C = 9, thì dừng lại. Chú ý sau mỗi lần bấm [=], dừng lại xem kết quả có thỏa mãn yêu cầu bài toán không.

Kết quả: $c = 1$; $b = 10$ thỏa mãn (2)

Vậy $a = b = 10$; $c = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BT 8. Tìm số chẵn lớn nhất có 5 chữ số $A = \overline{abcde}$ sao cho $B = \overline{abc}$ tạo thành 1 số chính phương và $C = \overline{cde}$ tạo thành 1 số lập phương.

Lời giải và đáp số

Vì $C = \overline{cde}$ là 1 số lập phương nên $\overline{cde} = k^3$, suy ra $5 \le k \le 9$

Mặt khác A là số chẵn nên k phải là số chẵn suy ra k = 6 hoặc k = 8

Suy ra C = 216 hoặc C = 512. Do đó c = 2 hoặc c = 5

Mặt khác, vì $B = \overline{abc}$ là số chính phương $\Rightarrow c = 5$

Ta có: $B = \overline{abc}$ là số chính phương nên $\overline{abc} = l^2$ suy ra $10 \le l \le 31$

Mà B tận cùng là 5 và A là số chẵn lớn nhất nên $l = 25$

Suy ra $B = 25^2 = 625$. Vậy số cần tìm là 62512.

BT 9. Tìm ba chữ số cuối cùng của $A = 7^{9999}$.

Lời giải và đáp số

Ba chữ số cuối cùng của A cũng là ba chữ số cuối cùng của $B = 7^{99}$

Dùng máy tính ta được:

$7^{10} \equiv 249 \pmod{1000}$

$249^3 \equiv 249 \pmod{1000} \Rightarrow 7^{30} \equiv 249 \pmod{1000} \Rightarrow 7^{90} \equiv 249 \pmod{1000}$

(vì $249^3 \equiv 249$ (mod 1000))

$7^9 \equiv 607 \pmod{1000} \Rightarrow 7^{99} \equiv 249 \times 607 \pmod{1000} \equiv 143 \pmod{1000}$

Suy ra ba chữ số cuối cùng của $B = 7^{99}$ là 143

Vậy ba chữ số cuối cùng của $A=7^{9999}$ là 143

BT 10. Tìm năm chữ số đầu tiên của $A=2^{2^{10}}$

Lời giải và đáp số

Quy trình bấm phím như sau:

Ghi vào màn hình: $2^{10} \times \log(2)$

Bấm [=] , ta được 308,2547156

Ghi vào màn hình: Ans – 308. Bấm [=]

Thực hiện phép tính : 10^{Ans}, ta được: 1,797693135

Vậy năm chữ số đầu tiên của $A = 2^{2^{10}}$ là 17976

BT 11. Từ 10000 đến 99999 có bao nhiêu số chia hết cho 3 mà không chia hết cho 5. Tính tổng các số đó.

Lời giải và đáp số

Số A chia hết cho 3 có dạng $A = 3k$

Ta có:

$10000 \le 3k \le 99999 \Leftrightarrow 3333,333 \le k \le 33333 \Leftrightarrow 3334 \le k \le 33333$ (vì k nguyên dương)

$\Rightarrow$ Có tất cả $(33333 - 3334) + 1 = 30000$ số chia hết cho 3

Vì A không chia hết cho 5 nên k không chia hết cho 5

Các số k thỏa $3334 \le k \le 33333$ và chia hết cho 5 có dạng $k = 5l$

nên $3334 \le 5l \le 33333 \Leftrightarrow 666,67 \le l \le 6666,6 \Leftrightarrow 667 \le l \le 6666$

$\Rightarrow$ Có tất cả (6666 - 667) + 1 = 6000 số chia hết cho 3 và chia hết cho 5

$\Rightarrow$ Có tất cả 30000 - 6000 = 24000 số chia hết cho 3 và không chia hết cho 5

Số lớn nhất chia hết cho 3 và nhỏ hơn 10000 là 9999

Số lớn nhất chia hết cho 15 và nhỏ hơn 10000 là 9990

Tổng các chữ số chia hết cho 3 và không chia hết cho 5 là:

$$S = 9999 \times 30000 - 9990 \times 6000 + 3 \times \left[\frac{30000 \times (30000+1)}{2} - 5 \times \frac{6000 \times (6000+1)}{2} \right]$$

Dùng máy tính tính được: S = 1320030000

Vậy S = 1320030000.

BT 12. Tính tổng: M=1.2008+2.2007+3.2006+....+2007.2+2008.1

Lời giải và đáp số

Ta có: $n(2009-n)=2009n-n^2$

Suy ra

$M=2009(1+2+3+...+2007+2008)-(1^2+2^2+3^2+...+2007^2+2008^2)$

Áp dụng các công thức:

$1+2+...+n=\frac{1}{2}n(n+1);$

$1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Ta có: $M=2009\times\frac{1}{2}\times2008\times(2008+1)-\frac{1}{6}\times2008\times(2008+1)\times(2\times2008+1)$

Dùng máy tính tính toán ta có: $M=1351414120$

Vậy $M=1351414120$.

BT 12. Tính tổng: $A=\left[\sqrt{1.2.3.4}\right]+\left[\sqrt{2.3.4.5}\right]+...+\left[\sqrt{2008.2009.2010.2011}\right]$

(với kí hiệu [x] là phần nguyên của x)

Lời giải và đáp số

Ta có: $n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n+1)^2-1$

Suy ra $\left[\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right]=n^2+3n$

Áp dụng công thức trên, ta có:

$\left[\sqrt{1.2.3.4}\right]=1^2+3\times1$

$\left[\sqrt{2.3.4.5}\right]=2^2+3\times2$

....

$\left[\sqrt{2008.2009.2010.2011}\right]=2008^2+3\times2008$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên, ta có:

$A=(1^2+2^2+....+2008^2)+3(1+2+...+2008)$

Áp dụng các đẳng thức:

$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6};$

$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Ta có: $A = \dfrac{2008(2008+1)(2.2008+1)}{6} + \dfrac{2008.2009}{2}$

Dùng máy tính ta tính được:

$A = 1004 \times 2009 \times 1339 + 1004 \times 2009 = 1004 \times 2009 \times 1342 = 2706862312$

Vậy A = 2706862312

BT 14. Hãy tìm chữ số n lớn nhất để 1000! chia hết cho 7^n.

Lời giải và đáp số

Để tìm được n, ta cần tính được số mũ của 7 khi phân tích 1000! ra thừa số nguyên tố.

Trước tiên ta tìm m lớn nhất sao cho $7^m \le 1000$

Dùng máy tính ta tìm được: m = 3

Ta tìm tất cả các số có dạng $7 \times x$ và nhỏ hơn 1000, đó là thương của phép chia 1000 cho 7. Dùng máy tính ta có 142 số như vậy;

Ta tìm tất cả các số có dạng $7^2 \times x$ và nhỏ hơn 1000, đó là thương của phép chia 1000 cho 49. Dùng máy tính ta có 20 số như vậy;

Ta tìm tất cả các số có dạng $7^3 \times x$ và nhỏ hơn 1000, đó là thương của phép chia 1000 cho 343. Dùng máy tính ta có 22 số như vậy;

Suy ra $n = (142-20) \times 1 + (20-2) \times 2 + 2 \times 3 = 164$

Vậy n lớn nhất để 1000! chia hết cho 7^n là 164.

BT 15. Tìm hai số tự nhiên nhỏ nhất a, b thỏa: $\left(\overline{ab}\right)^4 = \overline{a*****b}$

Lời giải và đáp số

Ta có: $1000000 \le \left(\overline{ab}\right)^4 = \overline{a*****b} \le 9999999$

Nên $31,6227766 \le \overline{ab} \le 56,23413111$

Vì $\overline{ab}$ nguyên nên $32 \le \overline{ab} \le 56$

Quy trình bấm phím như sau:

Đưa $31 \to A$ bằng cách: [3] [1] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Ghi vào màn hình: $A = A + 1 : A^4$

Ấn [CALC], sau đó lặp lại phím [=] cho đến khi A = 57 thì dừng lại. Chú ý sau mỗi lần bấm [=] thì dừng lại xem kết quả có thỏa mãn yêu cầu bài toán không, nếu có số nguyên nào thỏa thì cũng dừng lại.

Kết quả: 45 thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy a = 4; b = 5.

BT 16. Tìm số dư khi chia số 2001^{2010} cho số 2003.

Lời giải và đáp số

Ta có: 2003 là số nguyên tố và 2001; 2003 là hai số nguyên tố cùng nhau

Nên theo định lí Fermat nhỏ, ta có:

$2001^{2002} \equiv 1 \pmod{2003}$

Suy ra $2001^{2010} \equiv 2001^8 \pmod{2003}$ (1)

Dùng máy tính ta tính được:

$2001^2 \equiv 4 \pmod{2003}$

$2001^3 \equiv 8 \pmod{2003}$

và $2001^8 = \left(2001^3\right)^2 \times 2001^2$

Suy ra $2001^8 \equiv \left(2^3\right)^2 \times 1^2 \equiv 256 \pmod{2003}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $2001^{2010} \equiv 256 \pmod{2003}$

Vậy dư của phép chia 2001^{2010} cho số 2003 là 256.

BT 17. Tìm chữ số hàng đơn vị trong biểu diễn thập phân của số:

$$2^{2005} + 7^{2005} + 9^{2005}$$

Lời giải và đáp số

Nhận xét: $a^{4n+1} \equiv a \pmod{10}$ với mọi số tự nhiên a và n

Dùng máy tính ta tính được: $2005 = 4 \times 501 + 1$

Suy ra $2^{2005} \equiv 2 \pmod{10}$

$7^{2005} \equiv 7 \pmod{10}$

$9^{2005} \equiv 9 \pmod{10}$

Suy ra $2^{2005} + 7^{2005} + 9^{2005} \equiv 2 + 7 + 9 \pmod{10}$

Suy ra $2^{2005} + 7^{2005} + 9^{2005} \equiv 8 \pmod{10}$

Vậy chữ số hàng đơn vị của $2^{2005} + 7^{2005} + 9^{2005}$ là 8.

BT 18. Tìm 1 số chính phương có 6 chữ số . Ba chữ số sau lập thành 1 số hơn số lập thành bởi 3 chữ số đầu là 1.

Lời giải và đáp số

Gọi số cần tìm là $X \Rightarrow X = \overline{abcdef}$

Đặt $B = \overline{abc}; A = \overline{def}$

Ta có: $A - B = 1 \Rightarrow A = B + 1$

Mặt khác: $X = 1000B + A$ nên $X = 1001B + 1$

Ta có A là số có ba chữ số nên $101 \leq A \leq 999 \Rightarrow 100099 \leq X \leq 999998$

Mặt khác X là số chính phương nên $X = k^2$

$\Rightarrow 1001B + 1 = k^2 \Rightarrow 1001B = (k-1)(k+1)$

Vì $1001 = 7 \times 11 \times 13$ nên k -1 chia hết cho 13 hoặc k +1 chia hết cho 13

$\Rightarrow$ $k - 1 = 13m$ hoặc $k + 1 = 13m$

Ta có: $100101 \leq k^2 \leq 998999$ nên $317 \leq k \leq 999$

$\Rightarrow 25 \leq m \leq 76$

suy ra $B = \dfrac{m(13m+2)}{77}$ hoặc $B = \dfrac{m(13m-2)}{77}$

Quy trình bấm phím như sau:

Đưa $24 \rightarrow A$

Ghi vào màn hình: $A = A + 1 : \dfrac{A(13A+2)-1}{77} : \dfrac{A(13A-2)-1}{77}$

Ấn CALC, sau đó lặp lại phím = cho đến khi A = 77 thì dừng. Nếu một trong hai phép chia ở trên có thương là số nguyên thì nhận A (đại diện cho m) ứng với giá trị đó.

Kết quả: $m = 33$; $m = 44$; $m = 56$; $m = 65$

Suy ra B = 183; B = 328; B= 528; B =715

suy ra X = 183184; 328329; 528529; 715716

Vậy X = 183184; 328329; 528529; 715716

BT 19. Số chính phương P có dạng $P = \overline{17712ab81}$. Tìm các chữ số a, b biết rằng $a + b = 13$.

Hướng dẫn thực hành

Dễ thấy $4 \leq a, b \leq 9$

Đưa $3 \rightarrow A$ (biến a): 3 SHIFT RCL (−)

Ghi vào màn hình: $A = A + 1 : C = \sqrt{17712 \times 10^4 + 10^3 \times A + 100 \times (13 - A) + 81}$

Ấn CALC và lặp lại phím = cho đến khi A=A+1=9 thì ta được $C = 13309$ thì dừng.
Vậy $a = 9, b = 4$.

Lưu ý: Mỗi lần ấn $C = \sqrt{17712 \times 10^4 + 10^3 \times A + 100 \times (13 - A) + 81}$ nếu nhận giá trị nguyên thì nhận giá trị $a = A, b = 13 - A$

BT 20. Tìm hai chữ số tận cùng của số:

a) $A = 2^{999}$

b) $B = 3^{999}$

Lời giải và đáp số

a) $A = 2^{999} = \left(2^{20}\right)^{49} \times 2^{19}$

Ta có: 2^{20} tận cùng bằng 76 (dùng máy tính) mà 76^2 tận cùng bằng 76 (dùng máy tính) $\Rightarrow$ 76^n tận cùng bằng 76 với mọi n, nên $(2^{20})^{49}$ tận cùng bằng 76.

2^{19} tận cùng bằng 88 (dùng máy tính).

Ta có: 76×88 tận cùng bằng 88 (dùng máy tính)

Vậy $A = 2^{999}$ có hai chữ số tận cùng là 88.

b) $B = 3^{999} = \left(3^{20}\right)^{49} \times 3^{19}$

Ta có: 3^{20} tận cùng bằng 01 nên $\left(3^{20}\right)^{49}$ tận cùng bằng 01

3^{19} tận cùng bằng 67. Do đó $B = 3^{999}$ có hai chữ số tận cùng là 67.

BT 21. Tìm các số nguyên x để $\sqrt{199 - x^2 - 2x} + 2$ là một số chính phương chẵn.

Lời giải và đáp số

Giải phương trình $\sqrt{199 - x^2 - 2x} = 0$

Chọn chương trình giải phương trình bậc hai: [MODE] [5] [3]

Nhập các hệ số: [−] [1] [=] [−] [2] [=] [1] [9] [9] [=]

Ấn [=] ta được kết quả $x_1 = -1 + 10\sqrt{2} \approx 13{,}1421$, $x_2 = -1 - 10\sqrt{2} \approx -15{,}1421$

Để $\sqrt{199 - x^2 - 2x}$ có nghĩa thì $-15{,}1421 \le x \le 13{,}1421$

Do x là số nguyên nên $-15 \le x \le 13$

Chuyển về Mode Comp: Ấn [MODE] [1]

Thực hiện quy trình ấn phím sau:

Nhớ $-16 \rightarrow A$ bằng cách: [−] [1] [6] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Ghi vào màn hình: $A = A + 1 : \sqrt{\sqrt{199 - A^2 - 2A} + 2} \div 2$

Ấn [CALC], lặp lại liên tiếp phím [=] cho đến khi A=14 thì dừng. Mỗi lần lặp nếu biểu thức $\sqrt{\sqrt{199 - A^2 - 1A} + 2} \div 2$ nhận giá trị nguyên thì x nhận giá trị A.

Ta được các số thỏa yêu cầu là: -15, -3, 1, 13

BT 22. Tìm chữ số hàng chục nghìn của số sau 15^{2009}

Lời giải và đáp số

Nhận xét: số mũ n lớn nhất mà 15^n có 10 chữ số là 8

Dùng máy tính ta tính được : $15^8 = 2562890625$

Suy ra $15^8 \equiv 90625\left(\bmod 10^5\right)$

Dùng máy tính thử ta thấy $90625^2 \equiv 90625\left(\bmod 10^5\right)$

Suy ra $90625^n \equiv 90625\left(\bmod 10^5\right)$

Suy ra $15^{8n} \equiv 90625\left(\bmod 10^5\right)$

Dùng máy tính thực hiện phép chia ta được: 2009=8×251+1

Suy ra $15^{2009} \equiv 90625 \times 15\left(\bmod 10^5\right)$

Suy ra $15^{2009} \equiv 59375 \ (\bmod\ 10^5)$

Vậy chữ số hàng chục nghìn của 15^{2009} là 5.

BT 23. Tính tổng: $S = 23 + 233 + 2333 + 23333 + \ldots + 2\underbrace{333\ldots333}_{100 \text{ chữ số } 3}$

Lời giải và đáp số

Sử dụng công thức

$$S = k + \overline{kk} + \overline{kkk} + \ldots + \underbrace{\overline{kkk\ldots kkk}}_{n \text{ chữ số } k} = \frac{1}{k}\left(\frac{10^{k+1}-1}{9} - (k+1)\right)$$

Ta có

$$S = 23 + 233 + 2333 + 23333 + \ldots + 2\underbrace{333\ldots333}_{100 \text{ chữ số } 3}$$

$$= (20+3) + (200+33) + (2000+333) + \ldots + \left(\underbrace{2000\ldots000}_{100 \text{ chữ số } 0} + \underbrace{333\ldots333}_{100 \text{ chữ số } 3}\right)$$

$$= 2\left(10 + 100 + 1000 + \ldots + \underbrace{1000\ldots000}_{100 \text{ chữ số } 0}\right) + \left(3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots333}_{100 \text{ chữ số } 3}\right)$$

$$= 2\left(10 + 100 + 1000 + \ldots + \underbrace{1000\ldots000}_{100 \text{ chữ số } 0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{10^{101}-1}{9} - 4\right)$$

$$= 2.\left(\frac{10^{101}-1}{9} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{10^{101}-1}{9} - 4\right)$$

Vậy $S = 2.\left(\frac{10^{101}-1}{9} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{10^{101}-1}{9} - 4\right)$.

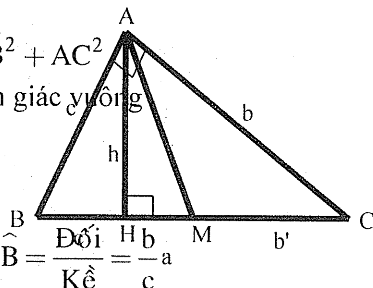
Chủ đề 9:

HÌNH HỌC PHẲNG

Dạng 1. GIẢI TAM GIÁC VÀ ĐA GIÁC

Phương pháp: Ta cần nắm vững các công thức sau

1. Tam giác vuông



Định lý pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Tỷ số lượng giác trong tam giác vuông

$$\sin\widehat{B} = \frac{\text{Đối}}{\text{Huyền}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{\text{Kề}}{\text{Huyền}} = \frac{c}{a}; \quad \tan\widehat{B} = \frac{\text{Đối}}{\text{Kề}} = \frac{b}{c}$$

Trong tam giác vuông

- *Cạnh góc vuông này bằng cạnh góc vuông kia nhân với tan góc đối hoặc cotan góc kề.*
- *Cạnh góc vuông bằng cạnh huyền nhân sin góc đối hoặc cosin góc kề.*
- *Cạnh huyền bằng cạnh góc vuông chia sin góc đối hoặc cosin góc kề.*

Diện tích tam giác vuông: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC$ (Vuông tại A)

Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$BA^2 = BH.BC\left(c^2 = c'.a\right)$; $CA^2 = CH.CB \quad \left(b^2 = b'.a\right)$

$AB.\ AC = BC.\ AH$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \quad \left(\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$BC = 2AM$ (đường trung tuyến bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền)

2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

- Định lý hàm số Côsin:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

- Định lý hàm số Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

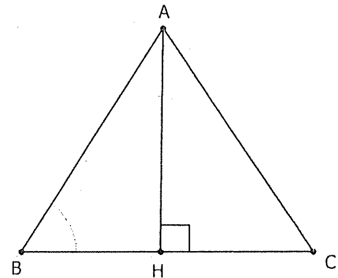
- Công thức độ dài đường trung tuyến:

$$m_a^2=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\frac{1}{2}a^2\right);\ m_b^2=\frac{1}{2}\left(a^2+c^2-\frac{1}{2}b^2\right);\ m_c^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-\frac{1}{2}c^2\right)$$

- Các công thức tính diện tích của một tam giác bất kì

$$S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$
$$=pr\ \left(r:\ \text{bán kính đường tròn nội tiếp } \Delta ABC,\ p=\frac{a+b+c}{2}\right)$$
$$=\frac{abc}{4R}\ \left(R:\ \text{bán kính đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC\right)$$

3. Tam giác cân

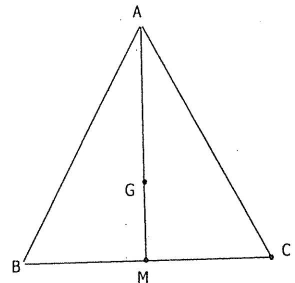


- Đường cao AH cũng là đường trung tuyến, đường trung trực, đường phân giác trong
- Tính đường cao và diện tích

$$AH=BH.\tan\widehat{B}=BH.\cot\widehat{BHA}$$
$$=CH\tan\widehat{C}=CH\cot\widehat{CHA}$$
$$=AB\sin\widehat{B}=AB\cos\widehat{BAH}$$
$$=AC\sin\widehat{C}=AC\cos\widehat{CAH}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.BC.AH=\frac{1}{2}AB^2\sin\widehat{A}$$

4. Tam giác đều

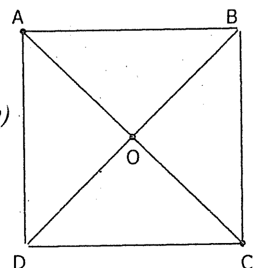


Đường cao AH cũng là đường trung tuyến, đường trung trực, đường phân giác trong. Đường cao của tam giác đều $h=AM=AB.\frac{\sqrt{3}}{2}$

(*đường cao* $h=$ *cạnh* $\times\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Diện tích : $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC\sin 60^0=\frac{1}{2}AB^2.\frac{\sqrt{3}}{2}=(AB)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$

5. Hình vuông



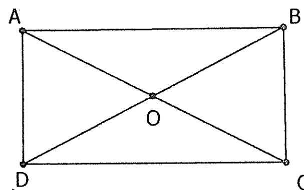
Diện tích hình vuông: $S_{ABCD}=(AB)^2$

(*Diện tích bằng cạnh bình phương hay cạnh nhân cạnh*)

Đường chéo hình vuông: $AC=BD=AB.\sqrt{2}$

(*đường chéo hình vuông bằng cạnh* $\times\sqrt{2}$)

6. Hình chữ nhật .



Diện tích hình chữ nhật : $S_{ABCD} = AB.AD$

Đường chéo hình chữa nhật bằng nhau và

$OA = OB = OC = OD$

(Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

7. Diên tích hình thoi:

$$S = \frac{1}{2}(\text{chéo dài x chéongắn})$$

8. Diện tích hình thang: $S = \frac{1}{2}(\text{đáy lớn + đáy nhỏ}) \text{ x chiều cao}$

9. Diện tích hình bình hành: S = đáy x chiều cao

10. Diện tích hình tròn: $S = \pi.R^2$

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

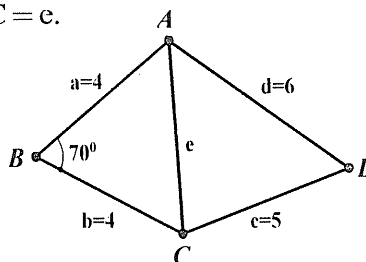
Ví dụ 1. Tính diện tích hình tứ giác ABCD biết

$AB = 4cm$, $BC = 4cm$, $CD = 5cm$, $DA = 6cm$ và góc $\widehat{B} = 70^0$

(Trích đề thi HSGMTCT Toàn quốc năm 2009, môn Toán 12 THPT)

Hướng dẫn thực hành

Đặt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$.



Ta có: $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos B}$

Đặt $p = \frac{c + d + e}{2}$

Lúc đó:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin B + \sqrt{p(p-c)(p-d)(p-e)}$$

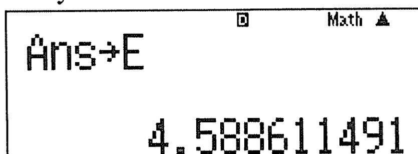
Nhớ 4 vào A, 4 vào B, 5 vào C, 6 vào D bằng cách:

[4] [SHIFT] [RCL] [(−)]   [4] [SHIFT] [RCL] [°''']

[5] [SHIFT] [RCL] [hyp]   [6] [SHIFT] [RCL] [sin]

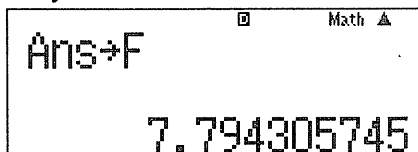
Tính e và đưa vào ô nhớ E: Ghi vào màn hình: $\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos(70)}$

Ấn [=] và lưu kết quả này vào ô nhớ E



Tính p nhớ vào F: Ghi vào màn hình $\frac{C+D+E}{2}$

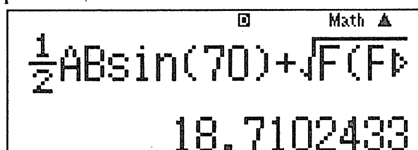
Ấn [=] và lưu kết quả này vào ô nhớ F



Tính S_{ABCD}

Ghi vào màn hình: $\frac{1}{2}AB\sin(70)+\sqrt{F(F-C)(F-D)(F-E)}$

Ấn [=] ta được kết quả: 18,7102433



Vậy $S_{ABCD} = 18,7102433.$

Lời giải và đáp số

Đặt $AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d,\ AC=e.$

Ta có: $e=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos B}$

Đặt $p=\frac{c+d+e}{2}$

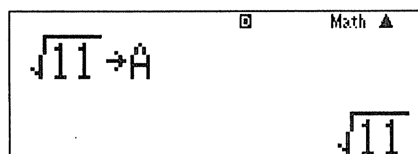
Lúc đó

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=\frac{1}{2}ab\sin B+\sqrt{p(p-c)(p-d)(p-e)}=18,7102433.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC biết $AB=\sqrt{15}$; $BC=\sqrt{11}$; $CA=\sqrt{8}$. Trên cạnh AC ta lấy điểm M sao cho $CM=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}AC$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}$

Hướng dẫn thực hành

Nhớ $BC=\sqrt{11}$ vào A bằng cách: [√■] [1] [1] [SHIFT] [RCL] (STO) [(-)] (A)



Tính MC và nhớ vào B: Nhập $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{8}\rightarrow B$

D Math ▲

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{8}\to B$

$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

Tính $\cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC.BC}$

Ghi vào màn hình: $\dfrac{8+11-15}{2.\sqrt{8}.\sqrt{11}}$ ấn [=] ta được kết quả: $\dfrac{\sqrt{22}}{22}$

Tính $BM=\sqrt{CM^2+CB^2-2CM.CB.\cos C}$ và nhớ vào C

Nhập: $\sqrt{B^2+A^2-2B\times A\times Ans}$ ấn [SHIFT] [RCL] [hyp]

D Math ▲

$\sqrt{B^2+A^2-2B\times A\times Ans}\to$

3.416164204

Tính $\cos\widehat{MBC}=\dfrac{MB^2+BC^2-MC^2}{2MB.BC}$

Nhập: $\dfrac{C^2+A^2-B^2}{2CA}$ ấn [=]

D Math ▲

$\frac{C^2+A^2-B^2}{2AC}$

0.8592209212

Tính $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=BM.BC.\cos\widehat{MBC}$

Ghi vào màn hình: CAAns ấn [=] kết quả: 9,735088936

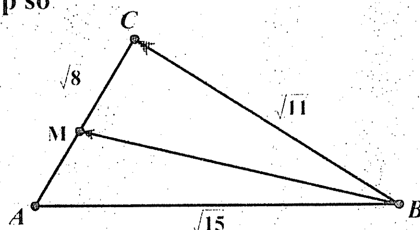
D Math ▲

CAAns

9.735088936

Vậy, $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}=9,735088936$.

Lời giải và đáp số



Ta có $CM=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times\sqrt{8}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC:

$$\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC.BC}=\frac{\sqrt{22}}{22}$$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác MBC:

$\Rightarrow BM = \sqrt{CM^2 + CB^2 - 2CM.CB.\cos C} \approx 3,416164204$

Tính $\cos\widehat{MBC} = \dfrac{MB^2 + BC^2 - MC^2}{2MB.BC} \approx 0,8592209212$

Từ đó $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = BM.BC.\cos\widehat{MBC} = 9,735088936.$

Ví dụ 3. Cho tam giác vuông với các cạnh bên có độ dài là $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[4]{3}$. Hãy tính tổng các bình phương của các trung tuyến.

Hướng dẫn thực hành

Giả sử tam giác vuông tại A. Ta có $a^2 = b^2 + c^2$

Từ công thức trung tuyến $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2 - \dfrac{a^2}{2}}{2}$

Suy ra: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{4} = \dfrac{3\left(b^2 + c^2\right)}{2}$

Ghi vào màn hình: $\dfrac{3\left(B^2 + C^2\right)}{2}$ bằng cách:

[▭] [3] [(] [ALPHA] [°'''] [x^2] [+] [ALPHA] [hyp] [x^2] [)] [▼] [2]

Ấn [CALC] nhập [SHIFT] [√▭] [4] ấn [=] nhập [4] [SHIFT] [$x^■$] [3] ấn [=]

```
3(B²+C²)
--------
   2
          6.377839361
```

được kết quả: 6,377839361

Đáp số: 6, 377839361

Ví dụ 4. Tính gần đúng diện tích tam giác ABC có thỏa $AB = 5$, $A = 5^0 13'38''$, $B = 34^0 51'33''$

(Trích đề thi HSGMTCT Thanh Hóa, BTTH, 2006-2007)

Hướng dẫn thực hành

Diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

Áp dụng định lí sin, ta có: $a = \dfrac{c\sin A}{\sin C}$; $b = \dfrac{c\sin B}{\sin C}$

suy ra $S = \dfrac{c^2 \sin A.\sin B}{2\sin C} = \dfrac{c^2 \sin A.\sin B}{2\sin(A + B)}$

Quy trình bấm phím như sau:

Lưu $5^0 13'38'' \to A$, $34^0 51'33'' \to B$ {đang ở chế độ đo độ}

Ghi vào màn hình: $\dfrac{5^2 \sin(A).\sin(B)}{2\sin(A+B)}$

Math ▲

$\dfrac{25\sin(A)\sin(B)}{2\sin(A+B)}$

1.010815261

Bấm [=] ta được diện tích của tam giác ABC là 1,010815261.

Vậy diện tích tam giác ABC là 1,010815261(đvdt)

Ví dụ 5. Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 1 (đvdt). Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là giao điểm của AM và BD. Tính diện tích tứ giác MNDC.

(Trích đề thi HSGMTCT Sóc Trăng, THPT, 2008-2009)

Hướng dẫn thực hành

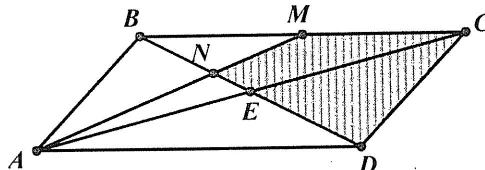
Gọi E là giao điểm của AC và BD

Ta có: N là trọng tâm của tam giác ABC

$$\Rightarrow \frac{BN}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BN}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{BNM}}{S_{BDC}} = \frac{BN}{BD}.\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{S_{MNDC}}{S_{BDC}} = \frac{5}{6}$$

Mặt khác $\dfrac{S_{BDC}}{S_{ABCD}} = \dfrac{1}{2}$ nên

$$\frac{S_{MNDC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}.\frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$



Vậy diện tích tứ giác MNDC bằng $\dfrac{5}{12}$ (đvdt).

Ví dụ 6. Cho Tứ giác *ABCD* có một đường chéo là *AC=14,5cm,* cạnh *CD = 8cm* và biết các góc $\widehat{DAC} = 27^0$, $\widehat{DCA}$ nhọn, $\widehat{BAC} = 42^0$ và $\widehat{BCA} = 36^0$. Tính chu vi *P* , diện tích *S* của tứ giác đó và số đo (độ, phút, giây) của góc ADC.

Lời giải và đáp số

Xét tam giác ADC,

Đặt $a = DC, k = DK, x = AD$ ta có:

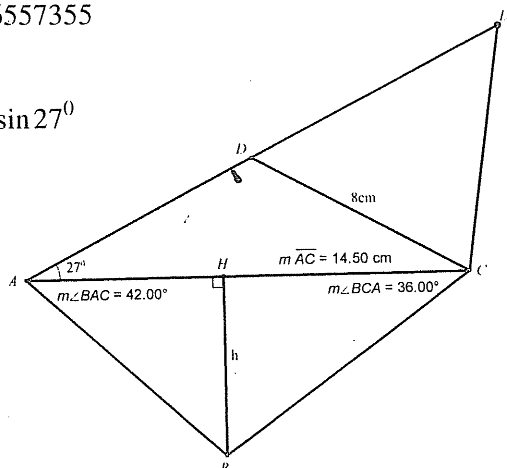
$$a^2 = AC^2 + x^2 - 2a.AC\cos A \Leftrightarrow 64 = 14,5^2 + x^2 - \left(2 \times 14,5\cos 27^0\right)x$$

Suy ra ta có phương trình: $x^2 - \left(29\cos 27^0\right)x + 146,25 = 0$

Phương trình có hai nghiệm:

$x_1 \approx 17,46557355cm$; $x_2 \approx 8,373615647cm$

Suy ra: Có 2 điểm D và D'thỏa mãn điều kiện bài toán
$AD \approx 8,373615647;\ AD' \approx 17,46557355$



Diện tích tam giác ADB là:

$$S_1 = \frac{1}{2}AC.AD\sin A = 7,25 \times AD\sin 27^0$$

Diện tích tam giác AD' B là:

$$S'_1 = \frac{1}{2}AC.AD'\sin A$$
$$= 7,25 \times AD'\sin 27^0$$

Xét tam giác ABC,
gọi $h = BH$, $y = AH$, ta có:

$$AH = \frac{h}{\tan 42^0},\ CH = \frac{h}{\tan 36^0}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{\tan 42^0} + \frac{h}{\tan 36^0} = 14,5$$

$$\Rightarrow h = \frac{14,5\tan 42^0 \tan 36^0}{\tan 42^0 + \tan 36^0} \approx 5,830330697\text{cm}$$

Suy ra: $AB = \frac{h}{\sin 42^0},\ BC = \frac{h}{\sin 36^0}$

Diện tích tam giác ABC là: $S_2 = \frac{1}{2}AC.h = \frac{7,25 \times 14,5\tan 42^0 \tan 36^0}{\tan 42^0 + \tan 36^0}$

Chu vi của tứ giác ABCD là:

$$P = AB + BC + CD + DA$$
$$= h\left(\frac{1}{\sin 42^0} + \frac{1}{\sin 36^0}\right) + 8 + 8,373615647 \approx 35,0061\text{cm}$$

Diện tích của tứ giác ABCD là:

$$S = S_1 + S_2 = 7,25 \times AD\sin 27^0 + 7,25h \approx 69,8311\text{cm}^2$$

Tính $\widehat{ADC}$:

$$\frac{AC}{\sin\widehat{ADC}} = \frac{CD}{\sin 27^0} \Rightarrow \sin\widehat{ADC} = \frac{14,5\sin 27^0}{8}\ \sin^{-1}\left(\frac{14,5\sin 27^0}{8}\right) \approx 55^0 22'19'',$$

mà góc ADC tù, nên: $\widehat{ADC} \approx 124^0 37'41''$

Chu vi của tứ giác ABCD là:

$$P = AB + BC + CD + DA$$
$$= h\left(\frac{1}{\sin 42^0} + \frac{1}{\sin 36^0}\right) + 8 + 17,46557355 \approx 44,0980\text{cm}$$

Diện tích của tứ giác ABCD là:

$S = S'_1 + S_2 = 7{,}25 \times AD'\sin 27^0 + 7{,}25h \approx 99{,}7566\,cm^2$

Tính góc AD'C: $\dfrac{AC}{\sin \widehat{ADC}} = \dfrac{CD'}{\sin 27^0} \Rightarrow \sin \widehat{AD'C} = \dfrac{14{,}5\sin 27^0}{8}$

Mà góc AD'C nhọn, nên: $\widehat{ADC} = \sin^{-1}\left(\dfrac{14{,}5\sin 27^0}{8}\right) \approx 55^0 22'19''$.

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

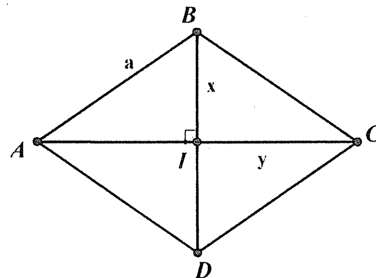
BT 1. Cho hình thoi có chu vi là 37,12 cm . Tỷ số giữa hai đường chéo là 2:3. Tính diện tích hình thoi ấy.

(Trích đề thi HSGMTCT Tây Ninh, BTTH, 2008-2009)

Lời giải và đáp số

Gọi độ dài của hai đường chéo là x và y; độ dài của cạnh hình thoi là a.

Theo đề bài ta có hệ:



$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = a^2 \end{cases}$$

Suy ra diện tích của hình thoi: $S = \dfrac{1}{2}xy = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4a}{\sqrt{13}} \times \dfrac{6a}{\sqrt{13}} = \dfrac{12}{13}a^2$

Chu vi của hình thoi là: $4a = 37{,}12$.

Dùng máy tính với $a = \dfrac{37{,}12}{4}$, ta tính được: $S = 79{,}49390769$.

Vậy $S = 79{,}49390769$.

BT 2. Cho tứ giác ABCD có $AB = BC = CD = 3{,}84(cm)$; $AD = 10(cm)$, góc $\widehat{ADC} = 32^0 13'48''$. Tính diện tích và các góc còn lại của tứ giác.

Lời giải và đáp số

Đặt $AB = BC = CD = a = 3{,}84(cm)$; $AD = c = 10(cm)$

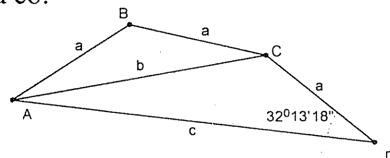
Áp dụng định lý cosin trong tam giác ΔADC ta có

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos D} \approx 7{,}055029796$

Áp dụng hệ quả định lý cosin trong ΔABC ta có:

$\cos B = \dfrac{2a^2 - b^2}{2a^2} \approx -0{,}6877388994$

Suy ra: $\widehat{ABC} \approx 133^0 27'5''$



Ta có:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}AB.BC\sin\widehat{ABC} + \frac{1}{2}CD.AD\sin\widehat{ADC}$$
$$= \frac{1}{2}\times 3,84^2 \times \sin\left(133^0 27'5''\right) + \frac{1}{2}\times 3,84\times 10\times \sin\left(32^0 13'18''\right)$$
$$\approx 15.58971169$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ta có:

$$\frac{a}{\sin\widehat{BAD}} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin\widehat{BAD} = \frac{a\sin B}{b} \Rightarrow \widehat{BAD} \approx 23^0 17'60''$$
$$\frac{a}{\sin\widehat{CAD}} = \frac{b}{\sin D} \Rightarrow \sin\widehat{CAD} = \frac{a\sin D}{b} \Rightarrow \widehat{CAD} = 16^0 53'20''$$

$$\widehat{A} = \widehat{BAD} + \widehat{CAD} \approx 23^0 17'60'' + 16^0 53'20'' \approx 40^0 11'20''$$

Từ đó: $\widehat{C} = 360^0 - \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}\right) \approx 154^0 8'17''$.

BT 3. Tam giác ABC có các cạnh AB = 4dm, AC = 6dm và $\widehat{A} = 61^0 43'$

a) Tính giá trị gần đúng chu vi của tam giác đó.

b) Tính giá trị gần đúng diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác trên.

Lời giải và đáp số

a) Áp dụng định lí hàm số cosin, ta có: $a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

Dùng máy tính ta tính được: $a \approx 5,408887197 \approx 5,40889\text{dm}$

Suy ra chu vi của tam giác ABC là 2p = AB + AC + BC = 15,40889 dm

b) Áp dụng định lí hàm số sin, ta có: $R = \dfrac{a}{2\sin A}$

Diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng: $S = \pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{4\sin^2 A}$

Dùng máy tính ta tính được: S = 29,63014676 = 29,63015 (dm^2)

BT 4. Cho 2 đường tròn tâm A, B cắt nhau. Biết rằng điểm A nằm trên đường tròn tâm B và diện tích phần chung của 2 đường tròn bằng nửa diện tích hình tròn tâm B. Tính tỷ số diện tích 2 hình tròn đã cho.

Hướng dẫn thực hành

Vì tỉ số của hai diện tích hình tròn là bình phương tỉ số của hai bán kính nên không mất tính tổng quát ta giả sử bán kính của đường tròn tâm B là 1(đvđd)

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của hai đường tròn.

P là giao điểm của tia AB và đường tròn tâm A

$\alpha = \widehat{AMB}$

Gọi S là diện tích phần chung của hai đường tròn chứa cung MP và MA

S(MP) là diện tích cung tròn MP

S(MA) là diện tích cung tròn MA

$S(MAB)$ là diện tích tam giác MAB

Gọi r là bán kính đường tròn tâm B $\Rightarrow \frac{r}{2} = \cos\alpha \Rightarrow r = 2\cos\alpha$

Ta có: $S = S(MP) + S(MA) - S(MAB)$

$$= \frac{r^2.\alpha}{2} + \frac{1^2.(\pi - 2\alpha)}{2} - \frac{1}{2}.1.r.\sin\alpha = 2(\cos\alpha)^2.\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\alpha.\cos\alpha$$

Mặt khác: diện tích hình tròn tâm B là π và S = $\frac{1}{4}$ diện tích hình tròn tâm B nên ta có phương trình: $2(\cos\alpha)^2.\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{\pi}{4}$

Dùng SHIFT CALC với giá trị ban đầu $\frac{\pi}{4}$, ta có giá trị của α là 0,952847864 (để máy ở chế đọ Rad)

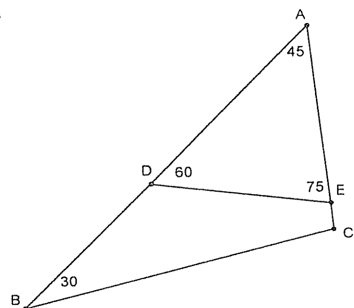
$\Rightarrow r = 1,158728473$, đó cũng là tỉ số bán kính của hai đường tròn

$\Rightarrow$ tỉ số hai diện tích là $r^2 = 1,342651674$.

Vậy tỉ số diện tích hình tròn tâm A và đường tròn tâm B là 1,342651674.

BT 5. Cho tam giác *ABC* có hai góc $\widehat{A} = 45^0$, $\widehat{B} = 30^0$. Gọi *D* và *E* là hai điểm tương ứng trên hai cạnh *AB* và *AC* sao cho $\widehat{ADE} = 60^0$ và diện tích tam giác *ADE* bằng nửa diện tích tam giác *ABC*. Tính gần đúng tỉ số $\frac{AD}{AB}$.

Lời giải và đáp số



Áp dụng định lý sin trong tam giác ADE ta có:

$$\frac{AD}{\sin 75^0} = \frac{AE}{\sin 60^0} \Rightarrow AD.AE = \frac{AD^2 \sin 60^0}{\sin 75^0}$$

Áp dụng đinh lý sin trong tam giác ABC:

$$\frac{AB}{\sin 75^0} = \frac{AC}{\sin 30^0} \Rightarrow AB.AC = \frac{AB^2 \sin 30^0}{\sin 75^0}$$

Theo đề, ta có:

$$\frac{1}{2} = \frac{dt\Delta ADE}{dt\Delta ABC} = \frac{AD.AE}{AB.AC} = \frac{AD^2 \sin 60^0}{AB^2 \sin 30^0} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \sqrt{\frac{\sin 30^0}{2\sin 60^0}}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} \approx 0,5373.$$

BT 6. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AH. Đường tròn này cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự ở D và E. Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O kẻ từ D và E cắt cạnh BC tương ứng tại M và N. Tính diện tích tứ giác MDEN khi $AB = 3\sqrt{2}$, $AC = 5\sqrt{3}$.

(Trích Đề thi HSG MTCT Bạc Liêu 2010)

Lời giải và đáp số

M, N lần lượt là các trung diểm của BH và HC

$\Delta OHN = \Delta OEN; \Delta MDO = \Delta MHO$

$S_{OHN} = \frac{1}{4}S_{AHN}; S_{MHO} = \frac{1}{4}S_{AHB}$

$S_{MDEN} = \frac{1}{2}S_{ABC} \approx 18,2712$

BT 7. Cho tam giác *ABC* có cạnh $AB = 6cm$, các góc $\widehat{BAC} = 85^0$ và $\widehat{ACB} = 40^0$ Tính gần đúng diện tích tam giác *ABC* và độ dài đường cao *AH* của tam giác đó.

Lời giải và đáp số

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC:

$$\frac{BC}{\sin 85^0} = \frac{AB}{\sin 40^0} \Rightarrow BC = \frac{6.\sin 85^0}{\sin 40^0}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.BA.BC.\sin B = \frac{1}{2}.\frac{6^2.\sin 55^0.\sin 85^0}{\sin 40^0}$$

Trong tam giác vuông ABH: $\sin 55^0 = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = 6\sin 55^0$.

BT 8. Cho hình thang cân *ABCD* có đáy lớn *AB* ngoại tiếp một đường tròn bán kính $r = \sqrt{3}$, góc $\widehat{DAB} = 40^0$. Tính gần đúng độ dài các cạnh đáy và đường chéo của hình thang *ABCD*.

Lời giải và đáp số

Ta có $AD = BC = \frac{2r}{\sin\alpha}$ $(\alpha = 40^0)$.

Đặt $AB = x; CD = y$

Thì $\begin{cases} x - y = 4r\cot\alpha \\ x + y = \dfrac{4r}{\sin\alpha} \end{cases}$ (vì $AB + CD = AD + BC$)

Tìm ra $x = 2r.\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $y = 2r.\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Theo định lí cosin trong tam giác *ABD:*

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\widehat{BAD}$$

$$= 4r^2\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + \frac{4r^2}{\sin^2\alpha} - 8r^2.\frac{1+\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.\cos\alpha$$

Tính ra $BD = 2r\sqrt{1+\frac{1}{\sin^2\alpha}}$.

Dùng MTCT ta tính được: $AB \approx 9,5175$; $CD \approx 1,2608$; $BD \approx 6,4065$.

BT 9. Cho $AB = c; AC = b; BC = a$ Δ ABC có AB = 4; BC = 6; CA = 9. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh AB; BC; CA lần lượt tại M; N; P. Tính gần đúng diện tích Δ MNP.

Lời giải và đáp số

$AB = c; AC = b; BC = a$. Gọi P là nữa chu vi $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ΔABC có $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Tương tự ta tính được $\widehat{B} \Rightarrow \widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B}$

Lại có: $AM = AP = p - a; BN = BM = p - b; CN = CP = p - c$

Vậy

$$S_{MNP} = S_{ABC} - S_{AMP} - S_{BMN} - S_{CNP}$$
$$= \frac{1}{2}ab\sin C - \frac{1}{2}AM^2\sin A - \frac{1}{2}BN^2\sin B - \frac{1}{2}CN^2\sin C$$

Vậy $S_{MNP} \approx 0,8522$

BT 10. Cho tam giác ABC có AB = 8,91cm ; AC = 10,32cm và $\widehat{BAC} = 72^0$. *(Tính chính xác đến 3 chữ số thập phân).*

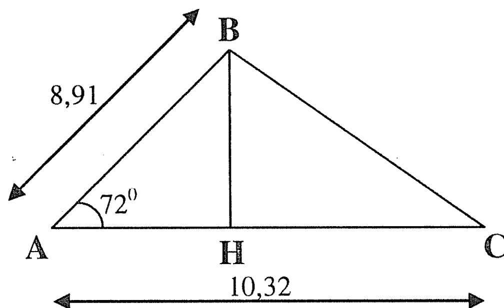
a) Độ dài đường cao BH.

b) Diện tích tam giác ABC.

c) Độ dài cạnh BC

Lời giải và đáp số

a) Ta có BH = AB $\sin\widehat{BAC}$ = 8,91.sin72^0 = 8,474 cm



b) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH = \frac{1}{2}10,32.8.474 = 43,726\ cm^2$

c) Ta có $AH = AB.\cos\hat{A} = 8,91.\cos72^0 = 2,753$ cm

Suy ra $HC = AC - AH = 10,32 - 2,753 = 7,567$ cm

Do đó $BC = \sqrt{BH^2 + HC^2} = \sqrt{8,474^2 + 7,567^2} = 11,361$ cm

Vậy: $BH = 8,474$ cm; $S_{ABC} = 43,726\,cm^2$; $BC = 11,361\,cm$

BT 11. Cho hình thang vuông ABCD (BC // AD; $\hat{B} = \hat{C} = 90^0$) có AB = 12,35cm; BC = 10,55cm ; $\widehat{ADC} = 57^0$.

a) Tính chu vi của hình thang ABCD.
b) Tính diện tích của hình thang ABCD.
c) Tính các góc của tam giác ADC.
(Làm tròn đến độ)

Lời giải và đáp số

a) Ta có $AD = \frac{AH}{\sin\hat{D}} = \frac{10,55}{\sin 57^0}$; Nên

$DH = AH.\cot\hat{D} = 10,55.\cot57^0$

$C_{ABCD} = 2AB + BC + DH + AD$

$= 2.12,35 + 10,55 + 10,55.\cot57^0 + \frac{10,55}{\sin 57^0} = 54,68068285$ cm

b) Ta có

$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD).BC}{2} = \frac{(12,35 + 12,35 + 10,55.\cot g57^0).10,55}{2}$
$= 166,4328443$

c) Ta có : $\tan\widehat{DCA} = \frac{AH}{HC} = \frac{10,55}{12,35}$ Suy ra $\widehat{DCA} = 41^0$. Do đó

$\widehat{DAC} = 180^0 - (\hat{D} + \widehat{DCA}) = 82^0$

BT 12. Cho tứ giác ABCD có $AB = 2$, $BC = 3$, $\widehat{ABC} = \alpha$, tam giác ACD đều. Tính gần đúng độ dài đường chéo BD khi $\alpha = 130^0$.

(Trích đề thi HSGMTCT Thanh Hóa, THPT, 2008-2009)

Lời giải và đáp số

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC, ta có:

$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\alpha$

Thay $AB = 2$, $BC = 3$, $\alpha = 130^0$ và dùng máy tính, ta tính được:
$CA = 4,551203282$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta được:

$$\sin\widehat{BAC}=\frac{BC\sin\alpha}{AC}\Rightarrow\widehat{BAC}=\arcsin\left(\frac{BC.\sin\alpha}{AC}\right)$$

Dùng máy tính ta được: $\widehat{BAC}=30,32808045^0\Rightarrow\widehat{BAD}=90,32808045^0$

Áp dụng định lí hàm số cosin, ta có:

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB.AD\cos\widehat{BAD}$$

Thay giá trị của AB, AD = AC, $\widehat{BAD}$, và dùng máy tính ta tính được:

$BD=4,981735946$

Vậy đường chéo $BD=4,981735946$ (cm).

Dạng 2. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

A. ĐƯỜNG THẲNG

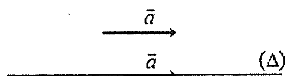
1. Định nghĩa vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng

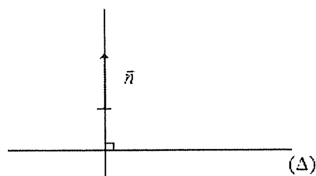
- $\vec{a}$ được gọi là vectơ chỉ phương (vtcp) của đường thẳng (Δ)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}\neq\vec{0}\\ \vec{a}\text{ có giá song song hoặc trùng với }(\Delta)\end{cases}$$

- $\vec{a}$ được gọi là vectơ pháp tuyến (vtpt) của đường thẳng (Δ)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}\neq\vec{0}\\ \vec{n}\text{ có giá vuông góc với }(\Delta)\end{cases}$$





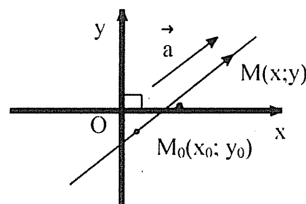
Chú ý:

- Nếu đường thẳng (Δ) có vtcp $\vec{a}=(a_1;a_2)$ thì có ta có thể chọn vtpt là $\vec{n}=(-a_2;a_1)$
- Nếu đường thẳng (Δ) có vtpt $\vec{n}=(A;B)$ thì ta có thể chọn có vtcp $\vec{a}=(-B;A)$



2. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

Trong mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng (Δ) qua $M_0(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{a}=(a_1;a_2)$ làm vtcp sẽ có



- Phương trình tham số là: $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$
- Phương trình chính tắc là: $(\Delta):\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}$

3. Phương trình tổng quát của đường thẳng:

a) Đường thẳng (Δ) đi qua $M_0(x_0;y_0)$,

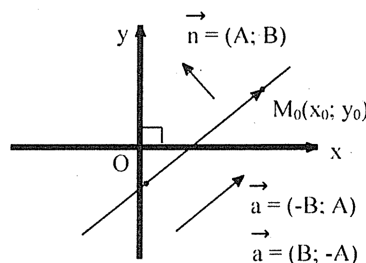
có vtpt $\vec{n}=(A;B)$

$(\Delta): A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

b) Trong mặt phẳng (Oxy). Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$(\Delta): Ax+By+C=0$, với $A^2+B^2\neq 0$

Chú ý:



- vtpt của (Δ) là $\vec{n}=(A;B)$
- vtpt của (Δ) là $\vec{a}=(B;-A)$ hoặc $\vec{a}=(-B;A)$
- $M_0(x_0;y_0)\in(\Delta)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+C=0$

c) Đường thẳng (Δ) đi qua A(a;0) và B(0;b) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

4. Phương trình đường thẳng đi qua một điểm và song song hoặc vuông góc với một đường thẳng cho trước

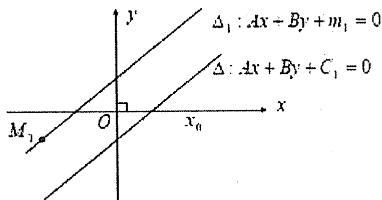
- Phương trình đường thẳng $(\Delta_1)//(\Delta_2): Ax+By+C=0$ có dạng

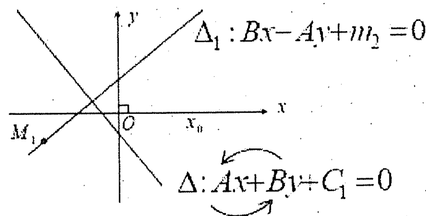
  $Ax+By+m_1=0$

- Phương trình đường thẳng $(\Delta_1)\perp(\Delta_2): Ax+By+C=0$ có dạng

  $Bx-Ay+m_2=0$

Chú ý: m_1; m_2 được xác định bởi một điểm có tọa độ đã biết nằm trên $(\Delta_1),(\Delta_2)$



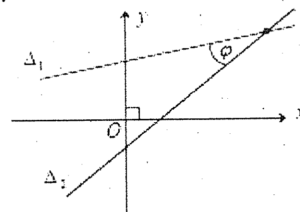


5. Góc giữa hai đường thẳng

Trong (Oxy) cho hai đường thẳng:

$(\Delta_1): Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$; $(\Delta_2): Ax_2 + By_2 + C_2 = 0$;

Gọi $\varphi\left(0^0 \le \varphi \le 90^0\right)$ là góc giữa $(\Delta_1);(\Delta_2)$ ta có:



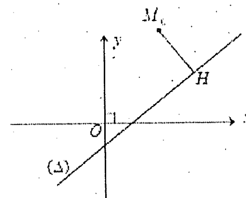
$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Từ đó: $(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

6. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường thẳng

$(\Delta): Ax + By + C = 0$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$.



Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0)$ đến (Δ) được tính bởi công thức:

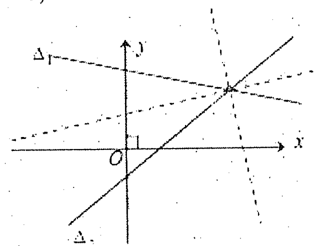
$$d\left(M_0;\Delta\right) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

7. Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng

Trong (Oxy) cho hai đường thẳng:

$(\Delta_1): A_1x + By + C_1 = 0$; $(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0$;

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi $(\Delta_1),(\Delta_2)$ là:



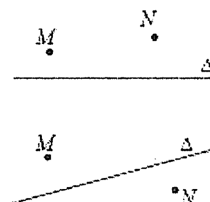
$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Hệ quả: Cho đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ và hai điểm $M(x_M;y_M)$; $N(x_N;y_N)$ không nằm trên (Δ).

Khi đó:

- Hai điểm M, N cùng phía đối với (Δ) khi và chỉ khi:

$\left(Ax_M + By_M + C\right)\left(Ax_N + By_N + C\right) > 0$



- Hai điểm M, N khác phía đối với (Δ) khi và chỉ khi:

$\left(Ax_M + By_M + C\right)\left(Ax_N + By_N + C\right) < 0$

B. ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương trình chính tắc

Đường tròn (C) có tâm I(a;b), bán kính R có phương trình là:

$$(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn.

Đặc biệt: Khi $I \equiv O$ thì $(C): x^2 + y^2 = R^2$.

2. Phương trình tổng quát

Trong mp (Oxy), phương trình:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{với } a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn (C) có tâm I(a;b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Trong mp(Oxy), phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{với } a^2 + b^2 - c > 0$ tại điểm $M_0(x_0;y_0) \in (C)$ là:

$$\Delta: x_0x + y_0y - a\left(x + x_0\right) - b\left(y + y_0\right) + c = 0.$$

4. Phương tích của một điểm đối với đường tròn

Cho đường tròn (O;R) và một điểm M cố định. Phương tích của một điểm M đối với đường tròn (O) được kí hiệu là $P(M/(O))$ là một số được xác định như sau: $P(M/(O)) = d^2 - OM^2$ $(d = OM)$.

Chú ý:

- $P(M/(O)) > 0 \Rightarrow$ M ở ngoài đường tròn
- $P(M/(O)) < 0 \Rightarrow$ M ở trong đường tròn
- $P(M/(O)) = 0 \Rightarrow$ M ở trên đường tròn

Trong mp (Oxy), phương trình:

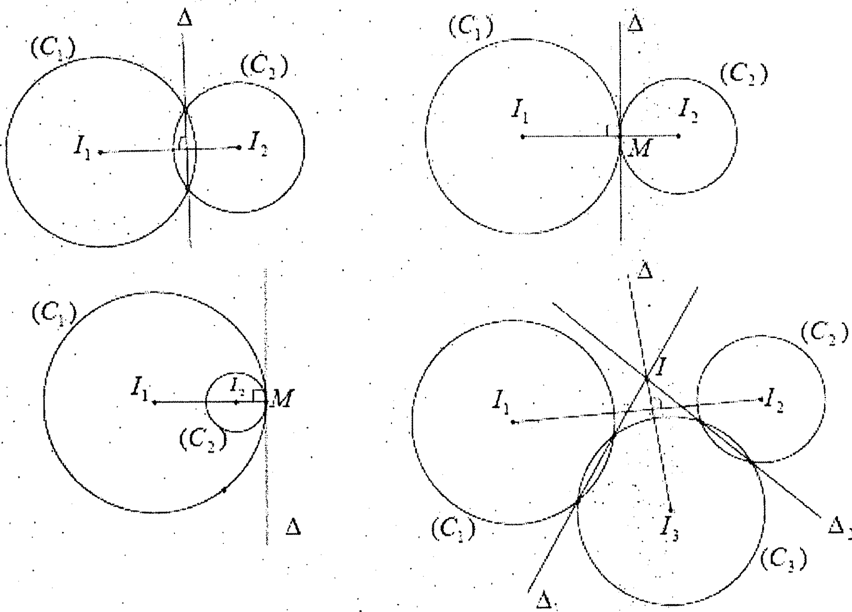
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \text{với } a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn (C) có tâm I(a;b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Phương tích của điểm M đối với đường tròn (C) là:

$$P(M/(O)) = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c$$

5. Trục đẳng phương của hai đường tròn:

Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn khác tâm là một đường thẳng vuông góc với đường nối hai tâm. Đường thẳng này được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn đó

Cách xác định trục đẳng phương



Định lý: Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) không cùng tâm có phương trình:

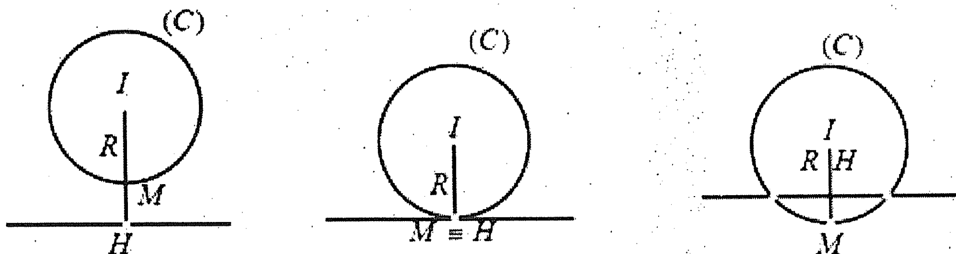
$(C_1): x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$; $(C_2): x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$;

Phương trình trục đẳng phương của (C_1) và (C_2) là:

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)x + c_2 - c_1 = 0$$

6. Các vấn đề liên quan

a) Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

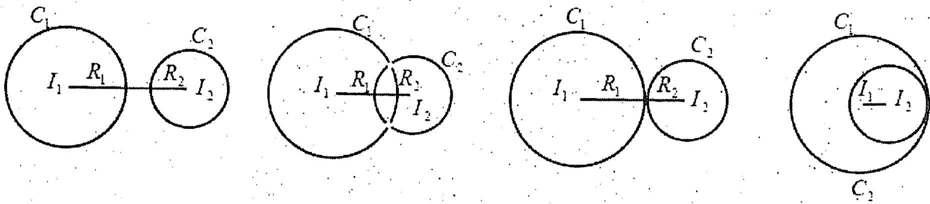


Gọi $IH = d(I,d)$ **:** Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d

- Nếu $IH > R \Rightarrow$ d không cắt đường tròn

- Nếu $IH = R \Rightarrow$ d tiếp xúc với đường tròn
- Nếu $IH < R \Rightarrow$ d cắt đường tròn

b) Vị trí tương đối của hai đường tròn



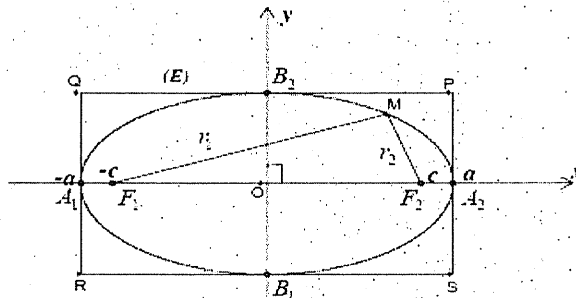
- (C_1) và (C_2) không cắt nhau $\Leftrightarrow I_1I_2 > R_1 + R_2$
- (C_1) và (C_2) cắt nhau $\Leftrightarrow |R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$
- (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau $\Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2$
- (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong với nhau $\Leftrightarrow I_1I_2 = |R_1 - R_2|$

C. ELIP

1. Định nghĩa: Elip (E) là tập các điểm M có tổng khoảng cách đến hai điểm cố định F_1, F_2 **bằng** một hằng số.

- Hai điểm F_1, F_2 được gọi là các tiêu điểm
- Độ dài $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự
- $(E) = \{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}, a > 0, a > c$

2. Phương trình chính tắc của Elip và các yếu tố thuộc về Elip



- Phương trình chính tắc: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2 \, (a > b)$
- Tâm đối xứng là gốc tọa độ O
- Trục đối xứng là trục Ox, Oy
- Tiêu điểm $F_1(-c;0); F_2(c;0)$

- Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$
- Trục lớn nằm trên Ox, độ dài trục lớn bằng 2a
- Trục bé nằm trên Oy, độ dài trục bé bằng 2b
- Đỉnh trên trục lớn $A_1(-a;0); A_2(a;0)$
- Đỉnh trên trục bé $B_1(0;-b); B_2(0;b)$
- Bán kính qua tiêu: với $M(x;y) \in (E)$ thì $\begin{cases} MF_1 = r_1 = a + \frac{c}{a}x \\ MF_2 = r_2 = a - \frac{c}{a}x \end{cases}$
- Tâm sai: $e = \frac{c}{a}$
- Đường chuẩn: $x = \pm\frac{a}{e}$

3. Phương trình tham số của Elip

Từ phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta suy ra phương trình tham số của (E) như sau: $(E): \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0;2\pi)$

4. Tiếp tuyến của Elip

Phương trình tiếp tuyến của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại điểm $M_0(x_0;y_0) \in (E)$ là

$$\frac{x.x_0}{a^2} + \frac{y.y_0}{b^2} = 1$$

5. Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với (E)

Cho $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0, (A^2 + B^2 > 0)$

Δ tiếp xúc với $(E) \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác đều ABC có $A(2;1); B(-1;2)$. Tìm tọa độ điểm C.

Lời giải và đáp số

Ta có $AB = \sqrt{10}$. Phương trình đường trung trực của đoạn thẳng AB là: $d: 3x - y = 0$. Vì tam giác ABC đều nên C thuộc đường thẳng $d \Rightarrow C(t;3t)$.

Mặt khác: $CA = CB = AB = \sqrt{10}$ nên ta có phương trình:

$$(t-2)^2 + (3t-1)^2 = 10 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right) \\ C\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm C thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$$C\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{3-3\sqrt{3}}{2}\right); C\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ và đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Chứng minh rằng d cắt đường thẳng (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho chu vi tam giác MAB lớn nhất.

Lời giải và đáp số

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B nên tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $A(1;1), B(2;0)$ hoặc ngược lại. Vì $AB = \sqrt{2}$ không đổi nên chu vi tam giác MAB lớn nhất khi và chỉ khi $MA + MB$ lớn nhất.

Gọi $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Suy ra tồn tại $\alpha \in [0;2\pi]$ sao cho: $\begin{cases} x = 2 + \sin\alpha \\ y = 1 + \cos\alpha \end{cases}$

Ta có

$$MA + MB = \sqrt{(1+\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} + \sqrt{(\sin\alpha + 1)^2 + \sin^2\alpha}$$
$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1+\cos\alpha}\right) \le 2\sqrt{2}\sqrt{(1^2+1^2)(2+\sin\alpha+\cos\alpha)}$$
$$= 2\sqrt{2 + \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \le 4\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sqrt{1+\sin\alpha}=\sqrt{1+\cos\alpha}\\ \cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow M\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Vậy chu vi tam giác MAB lớn nhất khi $M\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}};1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right)$ và điểm $M(1;4),N(-1;3)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA. Tìm tọa độ đỉnh C.

Lời giải và đáp số

Gọi $C(x;y)$, vì M là trung điểm của BC nên $B(2-x;8-y)$

Vì N là trung điểm của cạnh AC nên $A(-2-x;6-y)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{7}{3}+x;-\dfrac{23}{3}+y\right);\overrightarrow{BC}=(2x-2;2y-8)$

$$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{1}{3}-x;\frac{5}{3}-y\right),\overrightarrow{MN}=(-2;-1)$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{MN}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\left(\dfrac{1}{3}-x\right)-\left(\dfrac{5}{3}-y\right)=0\\ \left(\dfrac{7}{3}+x\right)(2x-2)+\left(-\dfrac{23}{3}+y\right)(2y-8)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{7}{3}-2x\\ \left(\dfrac{7}{3}+x\right)(2x-2)+\left(-\dfrac{16}{3}-x\right)\left(-4x-\dfrac{10}{3}\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-41-\sqrt{265}}{36};y=\dfrac{83+\sqrt{265}}{18}\\ x=\dfrac{-41+\sqrt{265}}{36};y=\dfrac{1+\sqrt{265}}{18}\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$$M\left(\frac{-41-\sqrt{265}}{36};\frac{83+\sqrt{265}}{18}\right);\ M\left(\frac{-41+\sqrt{265}}{36};\frac{1+\sqrt{265}}{18}\right)$$

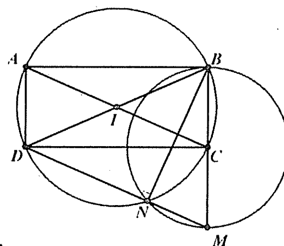
Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD, biết điểm $A(-4,8)$, điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$, M là điểm đối xứng của B qua C, $N(5;-4)$ là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm tọa độ hai điểm B và C.

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2014)

Lời giải và đáp số

Vì điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$ nên $C(c;-2c-5)$.

Gọi I là tâm của hình chữ nhật thì $I\left(\frac{c-4}{2};\frac{-2c+3}{2}\right)$.



Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật có dạng:

$$\left(x-\frac{c-4}{2}\right)^2+\left(y-\frac{-2c+3}{2}\right)^2=\left(\frac{c+4}{2}\right)^2+\left(\frac{2c+13}{2}\right)^2.$$

Do N là hình chiếu của B trên MD, nên đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật đi qua N do đó: $\left(5-\frac{c-4}{2}\right)^2+\left(-4-\frac{-2c+3}{2}\right)^2=\left(\frac{c+4}{2}\right)^2+\left(\frac{2c+13}{2}\right)^2$.

Nhận thấy sau khi khai triển phương trình trên ta được phương trình bậc nhất, nên sử dụng lệnh SHIFT CALC ta được $c=1\Rightarrow C(1;-7)$.

Phương trình ngoại tiếp hình chữ nhật là: $x^2+y^2+3x-y-60=0$.

Phương trình đường tròn tâm $C(1;-7)$, bán kính $CN=5$ là:

$x^2+y^2-2x+14y+25=0$.

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+y^2+3x-y-60=0\\x^2+y^2-2x+14y+25=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+3x-y-60=0\\5x-15y-85=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+3x-y-60=0\\x-3y-17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+3x-y-60=0\\x=3y+17\end{cases}$$

Suy ra: $(3y+17)^2+y^2+3(y+17)-y-60=0$. Nhận thấy đây là phương trình bậc hai, sử dụng lệnh SHIFT CALC ta tìm được $y=-4$, $y=-7$.

Với $y=-4$ thì $x=5$ trùng với tọa độ điểm N nên ta loại trường hợp này

Với $y=-7$ thì $x=-4$ ta được $B(-4;-7)$.

Ví dụ 5 . a) Chứng tỏ rằng elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ là hợp của hai đồ thị của hai hàm số $y=f_1(x)$ và $y=f_2(x)$. Xác định hai hàm số

b) Tính gần đúng tọa giao điểm của đường tròn (C) có tâm $I(5;3)$, bán kính $R=2$ với elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2011)

Lời giải và đáp số

a) Phương trình đường Elip $(E): \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$

Do đó elip là hợp của hai đồ thị hàm số:

$y=f_1(x)=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}; y=f_2(x)=-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$

b) Phương trình đường tròn $(C):(x-5)^2+(y-3)^2=4$.

Vẽ trong mặt phẳng tọa độ, ta thấy $\forall M(x;y)\in(C): x>0, y>0$

Hệ phương trình cho tọa độ giao điểm của đường tròn và Elip:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=4\\ y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}\end{cases},(x>0,y>0)\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=4\\ y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)^2+\left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}-3\right)^2=4 & (1)\\ y=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2} & (2)\end{cases}$$

Dùng chức năng SHIFT CALC giải phương trình (1) ta được

$x_1\approx 3,10868; x_2\approx 4,7006$.

Dùng chức năng CALC để tính các giá trị tung độ giao điểm

$y_1\approx 2,34968; y_2\approx 1,02253$

Vậy đường tròn cắt (E) tại hai điểm $A(3,10868;2,34968); B(4,7006;1,02253)$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho điểm C(2; 0) và Elip (E): $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) biết rằng CA = CB và góc $\widehat{ACB}=90^0$.

Lời giải và đáp số

Giả sử $A(x_0;y_0); -2<x_0<2$

Vì CA = CB nên $B(x_0;-y_0)$

Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh C $\Rightarrow H\left(x_0;\ 0\right)$

Từ HA = HB

$\Leftrightarrow |y_0| = 2 - x_0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x_0^2} = 2(2-x_0)$

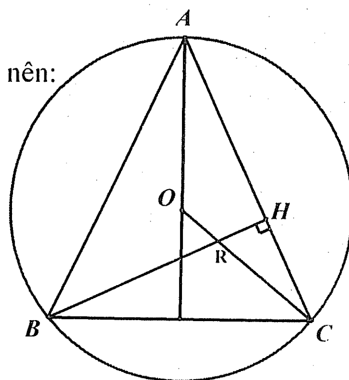
$\Leftrightarrow 5x_0^2 - 16x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2\ (l) \\ x_0 = \dfrac{6}{5}\ (th) \rightarrow |y_0| = \dfrac{4}{5} \end{array}\right.$

Vậy $A\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{4}{5}\right); B\left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{6}{5};-\dfrac{4}{5}\right); B\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{4}{5}\right)$

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn có bán kính R = 2012,2013cm. Tính giá trị lớn nhất độ dài đường cao BH ?

(Trích Đề thi HSG MTCT Quốc Gia 1013, Bộ Giáo Dục)

Lời giải và đáp số



Đặt $\widehat{BAC} = 2x\ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Δ ABC cân tại A nên:

$\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{1}{2}(\pi - 2x) = \dfrac{\pi}{2} - x$

Áp dụng định lý hàm số sin trong Δ ABC:

$\dfrac{AB}{\sin C} = 2R$

$\Rightarrow AB = 2R\sin C = 2R\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 2R\cos x$

Δ ABH vuông tại H, nên:

$BH = AB.\sin 2x = 2R.\cos x.\sin 2x$

$\Leftrightarrow BH = 4R.\sin x\cos^2 x = 4R\sin x.(1-\sin^2 x)$

Đặt $t = \sin x\ \ (0 < t \le 1)$ và $y = BH$

Có $y = 4Rt\left(1 - t^2\right) = 4R\left(-t^3 + t\right)$,

$(0 < t \le 1)$; $y' = 4R(-3t^2+1)$; $y'=0 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		1
y'		+	0	–	
y		↗	CĐ	↘	

Suy ra: $\max\limits_{(0;1]} y = y(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{8R\sqrt{3}}{9} = \frac{8.2012,2013\times\sqrt{3}}{9} \approx 3097,986566$

Đáp số: $3097,9866\ cm^2$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho các đường thẳng:

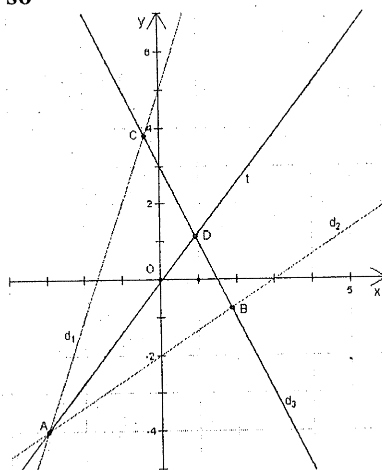
$d_1: 3x - y + 5 = 0;\ d_2: 2x - 3y - 6 = 0;\ d_3: 2x + y - 3 = 0$. Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại A; hai đường thẳng (d_2) và (d_3) cắt nhau tại B; hai đường thẳng (d_3) và (d_1) cắt nhau tại C.

a) Tìm tọa độ của các điểm A, B, C (viết dưới dạng phân số).

b) Tính gần đúng hệ số góc của đường thẳng chứa tia phân giác trong góc A của tam giác ABC và tọa độ giao điểm D của tia phân giác đó với cạnh BC.

c) Tính gần đúng diện tích phần hình phẳng giữa đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Kết quả làm tròn đến 2 chữ số lẻ thập phân.

Lời giải và đáp số



a) $A(-3;-4), B\left(\frac{15}{8};-\frac{3}{4}\right); C\left(-\frac{2}{5};\frac{19}{5}\right)$

b) $\widehat{A} = \tan^{-1}3 - \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

Góc giữa tia phân giác At và Ox là:

$\tan^{1-}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}3 + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

Suy ra: Hệ số góc của At là:

$a = \tan\left[\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}3 + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right]$

Bấm máy:



Ấn [=] ta được kết quả: $a \approx 1.3093$

Đường thẳng chứa tia phân giác At là đồ thị của hàm số: $y = ax + b$, At đi qua điểm $A(-3;-4)$ nên $b = 3a - 4$.

Tọa độ giao điểm D của At và BC là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ ax - y = -3a + 4 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình bằng cách bấm máy ta được kết quả: D(0,9284; 1,1432)

c) $AB=\sqrt{\left(\frac{15}{8}+3\right)^2+\left(4-\frac{3}{4}\right)^2}\to A$ {Tính và gán cho biến A}

$BC=\sqrt{\left(\frac{15}{8}+\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{19}{5}+\frac{3}{4}\right)^2}\to B$

$CA=\sqrt{\left(3-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{19}{5}+4\right)^2}\to C$

Gán $p=\frac{A+B+C}{2}\to D$ (Nửa chu vi p)

Diện tích của tam giác ABC: $S=\sqrt{D(D-A)(D-B)(D-C)}\to E$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $R=\frac{abc}{4S}\to F$

ALPHA (−) ALPHA °,,, ALPHA hyp ÷ (4 ALPHA cos) SHIFT RCL cos

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC: $r=\frac{S}{p}$.

Diện tích phần hình phẳng giữa đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left(R^2-r^2\right)\approx 46,44(cm^2)$

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Tính gần đúng toạ độ hai giao điểm của elíp $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng $5x+6y-7=0$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm của Elip và đường thẳng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\\ 5x+6y-7=0\end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai cặp nghiệm sau: $\begin{cases}x_1\approx 2,5989\\ y_1\approx -0,9991\end{cases}$; $\begin{cases}x_2\approx -0,8916\\ y_2\approx 1,9096\end{cases}$

BT 2. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho đường thẳng $\Delta:\frac{12}{5}x+\frac{3}{7}y-\frac{213}{35}=0$ và hai điểm A(30; 8), B(-1; 40). Tìm điểm M trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất.

(Trích Đề thi HSG MTCT Đồng Tháp 2011)

Lời giải và đáp số

Gọi Δ' là đường thẳng qua A và vuông góc với Δ

$\Delta': \frac{3}{7}x - \frac{12}{5}y - \frac{222}{35} = 0$.

Gọi $I = \Delta \cap \Delta'$ có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} 84x + 15Y - 213 = 0 \\ 15x - 84y - 222 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua I $\Rightarrow A'(-26;-2)$

Phương trình đường thẳng qua $A'B: 42(x+26) - 25(y+2) = 0$

$M = \Delta \cap A'B$ nên tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình

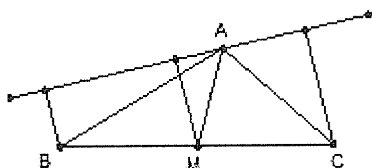
$\begin{cases} 84x + 15y - 213 = 0 \\ 42x - 25y + 1042 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M \approx -3,774725275 \\ y_M \approx 35,33846154 \end{cases}$

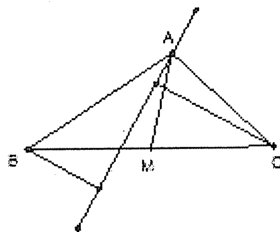
BT 3. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho tam giác *ABC* với $A(3; 5), B(0; 9), C(2; 2)$.

a. Tính theo độ, phút, giây số đo góc $\widehat{A}$ của tam giác *ABC*.

b. Gọi Δ là đường thẳng di động luôn đi qua *A*. Tính gần đúng giá trị lớn nhất của tổng các khoảng cách từ *B* và *C* đến Δ.

Lời giải và đáp số





Gọi M là trung điểm của BC. Ta có: $BC = \sqrt{53}$; $AM = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$d = d(B, \Delta) + d(C, \Delta) \le \max\{2AM; BC\} = BC = \sqrt{53}$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi khi $\Delta \perp BC$

Vậy $d_{max} = BC = \sqrt{53} \approx 7,28011$

BT 4. Cho tam giác ABC cân tại A và nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = 2009,2010$. Tính gần đúng giá trị lớn nhất độ dài đường cao BH của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Đặt $\widehat{BAC} = 2x$, $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\pi}{2} - x$

Ta có $AB = 2R.\sin C = 2R.\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2R.\cos x$

$BH = AB.\sin 2x = 2R.\cos x.\sin 2x = 4R.\sin x\cos^2 x = 4R.\sin x.\left(1 - \sin^2 x\right)$

Đặt $t = \sin x\left(0 < t < 1\right)$ thì $BH = 4R.(t - t^3)$

Xét hàm $f(t) = 4R.(t - t^3), t \in \left(0;1\right)$, tìm ra $\max\limits_{(0;1)} f(t) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8R\sqrt{3}}{9}$

Đáp số: $BH_{min} \approx 3093,3673$.

BT 5. Tính gần đúng tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x - 4$ với Elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10 và hai tiêu điểm $F_1\left(-4;\, 0\right)$, $F_2\left(4;\, 0\right)$

Lời giải và đáp số

Elip (E) có $a = 5; c = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Suy ra phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

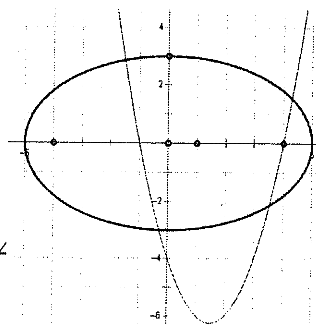
Hệ phương trình cho tọa độ giao điểm của (P) và (E) là:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = x^2 - 3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + 25\left(x^2 - 3x - 4\right)^2 - 225 = 0 \ (1) \\ y = x^2 - 3x - 4 \quad (2) \end{cases}$$

Dùng chức năng **TABLE** để tìm các khoảng chứa nghiệm của phương trình (1).

Dùng chức năng **SOLVE**, lần lượt lấy các giá trị đầu là $-1,5; -0,5; 3; 4$, ta tìm được 4 nghiệm: $x_1 \approx -1,518012002$; $x_2 \approx -0,304317517$;

$x_3 \approx 3,531289221$; $x_4 \approx 4,291040299$



Suy ra tung độ các giao điểm:

$y_1 \approx 2,858396446$; $y_2 \approx -2,994438298$;
$y_3 \approx -2,123864101$; $y_4 \approx 1,53990595$

Vậy có 4 giao điểm của (P) với elip (E):

$M\left(-1,51801; 2,85840\right)$, $N\left(-0,30432;\, -2,9944\right.$

$P\left(3,53129; -2,12386\right)$, $Q\left(4,29104; 1,53991\right)$

BT 6. Cho tam giác ABC có cạnh $12,25cm$, các trung tuyến AA', BB', CC' cắt nhau tại O.

a) Tính diện tích tứ giác $BC'B'A'$ và $BC'B'C$.

b) Cho tam giác AOB quay quanh OA. Hãy tính thể tích và diện tích toàn phần của hình được sinh ra.

(Trích Đề thi HSG MTCT Quốc Gia 2012)

Lời giải và đáp số

a) $S_{BC'B'A'} = \frac{1}{2}BB'.C'A'$ (BC'B'A'- là hình thoi)

$S_{BC'B'C} = \frac{1}{2}(C'B' + BC).HA'$ (H là giao điểm B'C' và AA', BC'B'C là hình thang cân)

$S_{BC'B'A'} \approx 32,4895$; $S_{BC'B'C} \approx 48,7342$

b) Ta có

$V = \frac{1}{3}\pi A'B^2.AA' - \frac{1}{3}A'B^2.OA$

$S = \pi.A'B.(AB + OB)$ (Sxq hình nón sinh ra bởi A + Sxq hình nón sinh ra bởi O)

$V \approx 277,8538cm^3; S \approx 371,8093cm^2$

BT 7. Trong mặt phẳng *Oxy*, cho. elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{2} = 1$ và đường thẳng $d: y = 20x + 12$

a) Tìm gần đúng tọa độ giao điểm A, B của (*E*) và *d*.

b) Tìm gần đúng tọa độ điểm M thuộc (*E*) sao cho tam giác MAB có diện tích lớn nhất.

Lời giải và đáp số

a) Tọa độ giao điểm A, B của (*E*) và *d* là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = 20x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20x + 12 \\ x^2 + 8(20x + 12)^2 = 16 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta tìm được:

A(-0,5299; 1,4017)

B(-0,6697; -1,3943)

b) Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow x_0^2 + 8y_0^2 = 16$

$S_{MAB} = \frac{1}{2}d(M, AB) = \frac{1}{2}d(M, d).AB$

Do AB không đổi nên S_{MAB} lớn nhất khi $d(M, d)$ lớn nhất.

$$d(M, d) = \frac{|20x_0 - y_0 + 12|}{\sqrt{401}} \le \frac{|20x_0 - y_0|}{\sqrt{401}} + \frac{12}{\sqrt{401}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left|20x_0 - y_0\right| = \left|20x_0 - \frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{2}y_0\right| \le \sqrt{400 + \frac{1}{8}}.\sqrt{x_0^2 + 8y_0^2} = \sqrt{6420}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 20x_0 - y_0 \ge 0 \\ \frac{x_0}{20} = -8y_0 \\ x_0^2 + 8y_0^2 = 16 \end{cases}$

Giải ra ta được giá trị x_0, y_0 từ đó suy ra tọa độ điểm M.

Đáp số: M(3,9994; -0,0250)

Chú ý: Ta có thể giải bằng cách lượng giác hóa tọa độ diểm M hoặc viết phương trình tiếp tuyến của (E) song song với d.

BT 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: mx + 4y = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 26 = 0$ có tâm I. Tìm giá trị gần đúng của m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 10.

(Trích Đề thi HSG MTCT Quảng Ninh 2012)

Lời giải và đáp số

Đường tròn (C) có tâm $I(1; m), R = 3\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của dây cung AB. Ta có IH là đường cao của tam giác IAB.

$$IH = d(I, \Delta) = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 16}}; AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{\frac{432 + 2m^2}{m^2 + 16}}$$

Diện tích tam giác IAB là $S_{IAB} = 10 \Leftrightarrow 2S_{IAH} = 10$

$$\Leftrightarrow d(I, \Delta).AH = 10 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{432 + 2m^2}{m^2 + 16}}.\frac{5m}{\sqrt{m^2 + 16}} = 10$$

$$\Leftrightarrow m^4 - 152m^2 + 512 = 0$$

Giải phương trình bậc bốn này ta được:

$m \approx 12,1812; m \approx -12,1812; m \approx 1,8586; m \approx -1,8586$.

BT 9. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $(\Delta): \sqrt{2}x - 2y + 4 = 0$. Gọi B, C là giao điểm của (Δ) và (E), $y_B > y_C$ và A là điểm trên (E) sao cho khoảng cách từ A đến (Δ) là lớn nhất. Tìm điểm M trên (E) để khoảng cách từ M tới đường thẳng AB là lớn nhất.

Lời giải và đáp số

Gọi $M\left(2\sqrt{2}\sin t;2\cos t\right)\in(E), t\in[0;2\pi]$, ta có:

$$d\left(A;(\Delta)\right)=\frac{|4\sin t-4\cos t+4|}{\sqrt{6}}=\frac{\left|4\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+4\right|}{\sqrt{6}}$$

Như vậy $d\left(A;(\Delta)\right)$ lớn nhất khi $\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow t=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow A\left(2;-\sqrt{2}\right)$

$$d\left(A;(\Delta)\right)=0\Rightarrow\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\Rightarrow B(0;2)\\ t=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow C\left(-2\sqrt{2};0\right)\end{array}\right.$$

Phương trình $(AB):\left(2+\sqrt{2}\right)x+2y-4=0$

$$d\left(M;(AB)\right)=\frac{\left|\left(2+\sqrt{2}\right)2\sqrt{2}\sin t+4\cos t-4\right|}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{\left|8\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{8}-4\right|}{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}$$

Như vậy $d\left(M,(AB)\right)$ lớn nhất khi

$$\sin\left(t+\frac{\pi}{8}\right)=-1\Rightarrow t=\frac{11\pi}{8}\Rightarrow M\left(-2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8};-2\cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$M:\begin{cases}x\approx-2,61312593\\ y\approx-0,7653668647\end{cases}$$

BT 10. Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x+5y-4=0$. Tìm A, C (không trùng với gốc tọa độ) lần lượt thuộc trục hoành và trục tung, sao cho tồn tại $B, D\in(C)$ để $ABCD$ là hình vuông.

Lời giải và đáp số

Gọi $A(a,0); C(0,c)$, do $ABCD$ là hình vuông nên đường thẳng (AC) qua tâm $I(2;-\frac{5}{2})$ của đường tròn (C), ta có phương trình:

$$\frac{2}{a}-\frac{5}{2c}=1 \text{ hay } a=\frac{4c}{5+2c} \quad (1)$$

Gọi M là tâm của hình vuông ABCD, ta có $M\left(\frac{a}{2};\frac{c}{2}\right)$ và

$$IM^2 = ID^2 - MD^2 = R^2 - \frac{AC^2}{4}$$

Hay ta có phương trình

$$\left(2-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}+\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{57}{4} - \frac{a^2+c^2}{4}$$

Kết hợp với (1) ta có phương trình

$$\left(4-\frac{4c}{5+2c}\right)^2 + (5+c)^2 = 57 - \left(\frac{4c}{5+2c}\right)^2 + c^2$$

Nhập phương trình vào máy tính và giải ta được hai nghiệm là:

$$c = 1.5937 \text{ và } c = -1.2786$$

Từ đó, ta có hai bộ điểm A,C là $\begin{cases} A(0.7786;0) \\ C(0;1.5937) \end{cases}$; $\begin{cases} A(-2.0937;0) \\ C(0;-1.2786) \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} A(0.7786;0) \\ C(0;1.5937) \end{cases}$ Và $\begin{cases} A(-2.0937;0) \\ C(0;-1.2786) \end{cases}$

BT 11. Tìm giá trị đúng của m và n để đường thẳng (d): y = mx + n là một tiếp tuyến của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tại A(1; 2) và (E) đi qua điểm B(-2; $\sqrt{3}$)

Lời giải và đáp số

Thay tọa độ A và B vào phương trình của elip và giải hệ ta được:

$a^2 = 13;\ b^2 = \frac{13}{3}$

Ta được phương trình $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{\frac{13}{3}} = 1$

Tiếp tuyến tại A(1; 2) có phương trình : $\frac{1x}{13} + \frac{2y}{\frac{13}{3}} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{6}$

Do đó: $m = -\frac{1}{6};\quad n = \frac{13}{6}$

BT 11. Cho tam giác ABC nhọn, có chân ba đường cao nằm trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt tương ứng là $M(-1;-1); N(3;5); P(-4;1)$. Tìm tọa độ trực tâm tam giác ABC.

Lời giải và đáp số

H chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

Áp dụng công thức:

$$x_H = \frac{NP.x_M + PM.x_N + MN.x_P}{NP + PM + MN}$$

$$y_H = \frac{NP.y_M + PM.y_N + MN.y_P}{NP + PM + MN}$$

Ta suy ra được tọa độ điểm $H(-1,38197;0,90983)$

BT 12. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 12y + 44 = 0$ và Parabol: $(P): y = 9 - x^2$. Trên (C) ta lấy điểm A, trên (P) ta lấy điểm B. Xác định khoảng cách ngắn nhất có thể có giữa hai điểm A và B.

Lời giải và đáp số

AB ngắn nhất khi và chỉ khi IB ngắn nhất và A, B, I thẳng hàng.

Khi đó: $AB_{min} = IB_{min} - 1$

Giả sử $B\left(x; 9 - x^2\right)$. Khi đó: $IB^2 = f(x) = x^4 - 5x^2 - 6x + 18$

Khảo sát hàm số $f(x)$ trong khoảng $(0;3)$ ta được $\min f(x) = f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$

Suy ra $AB_{min} = \sqrt{f\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)} - 1$

$AB_{min} \approx 0,220602478$.

BT 13. Tính diện tích tam giác ABC nếu phương trình các cạnh của tam giác đó là: $AB: x + 3y = 0$; $BC: 5x + y - 2 = 0$; $AC: x + y - 6 = 0$.

Lời giải và đáp số

Tìm tọa độ các điểm A , B , C bằng cách giải các hệ phương trình tương ứng.

$A(9;-3)$; $B\left(\frac{3}{7};-\frac{1}{7}\right)$;C (-1; 7)

Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{60}{7}; \frac{20}{7}\right)$; $\overrightarrow{AC} = (-10; 10)$

Tính diện tích tam giác ABC theo công thức

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = \frac{200}{7}$$

BT 15. Tính gần đúng giá trị của a và b nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ tại giao điểm có các tọa độ dương của elip đó và parabol $y^2 = 2x$

Lời giải và đáp số

Tính tọa độ giao điểm có tọa độ dương của elip và parabol đã cho bằng cách giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ y^2=2x \end{cases}$$

Gọi tọa độ đó là $(x_0;y_0)$ thì phương trình tiếp tuyến của elip tại điểm đó là

$\dfrac{x_0}{9}x+\dfrac{y_0}{4}y=1$ hay là $y=-\dfrac{4x_0}{9y_0}x+\dfrac{4}{y_0}$.

Do đó $a=-\dfrac{4x_0}{9y_0}$ và $b=\dfrac{4}{y_0}$.

$a\approx -0,3849$; $b\approx 2,3094$

BT 15. Cho hai điểm $A(2;-2);B(3;0)$ và đường tròn C): $x^2+y^2+4x-2y-5=0$.

Tìm tọa độ gần đúng tất cả điểm M thuộc (C) sao cho tam giác AMB có diện tích bằng 7.

Lời giải và đáp số

Phương trình đường thẳng AB: $2x-y-6=0$

Giả sử $M(x_0;y_0)$. Ta có

$$S_{AMB}=\frac{1}{2}AB.d(M,AB)=7\Leftrightarrow |2x_0-y_0-6|=14$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} |2x_0-y_0-6|=14 \\ (x_0+2)^2+(y_0-1)^2=10 \end{cases}$

Đáp số:

$M(-1,91938;\ 4,16125)$ hoặc $M(-4,48062;\ -0,96125)$

BT 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(1;1)$. Hãy tìm điểm B trên đường thẳng $y=3$ và điểm C trên trục hoành sao cho tam giác ABC đều.

Lời giải và đáp số

Cách 1: Gọi $B(b;3),C(c;0)$. Vì tam giác ABC đều nên $\begin{cases} AB=AC \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=60^0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)^2+4=(c-1)^2+1 \\ \dfrac{(b-1)(c-1)-2}{\sqrt{(b-1)^2+4}.\sqrt{(c-1)^2+1}}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{3};c=\dfrac{3+5\sqrt{3}}{3} \\ b=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{3};c=\dfrac{3-5\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là:

$$B\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{3};3\right),C\left(\frac{3+5\sqrt{3}}{3};0\right) \text{ hoặc } B\left(\frac{3-4\sqrt{3}}{3};3\right),C\left(\frac{3-5\sqrt{3}}{3};0\right).$$

Cách 2: Ta có thể giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}AB=AC\\AB=BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b-1)^2+4=(c-1)^2+1\\(b-1)^2+4=(b-c)^2+9\end{cases}$$

BT 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $d:3x-y+1=0$ đạt giá trị lớn nhất, đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải và đáp số

Giả sử $M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=5$

Ta có $d(M,d)=\dfrac{|3x-y-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3(x-1)-(y-2)|}{\sqrt{10}}$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$|3(x-1)-(y-2)|\le\sqrt{(9+1)\left[(x-1)^2+(y-2)^2\right]}=5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 0\le d(M;d)\le\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\sqrt{5}$$

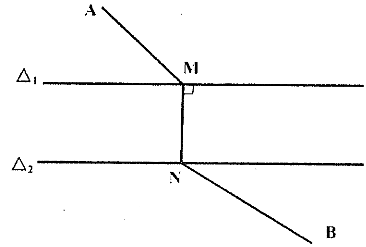
Giá trị nhỏ nhất của $d(M;d)$ bằng 0 khi:

$$\begin{cases}3x-y-1=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\frac{1}{\sqrt{2}},y=2-\frac{3}{\sqrt{2}}\\x=1+\frac{1}{\sqrt{2}},y=2+\frac{3}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}};2-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\\M\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}};2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\end{array}\right.$$

Giá trị lớn nhất của $d(M;d)$ bằng $\sqrt{5}$ xảy ra khi

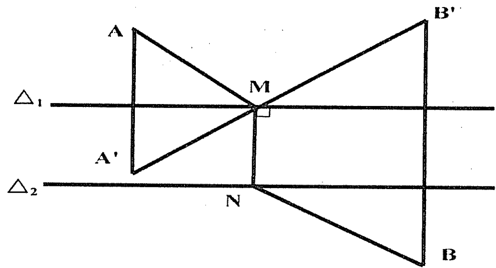
$$\begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}\\(x-1)^2+(y-2)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\frac{3}{\sqrt{2}},y=2+\frac{1}{\sqrt{2}}\\x=1+\frac{3}{\sqrt{2}},y=2-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}};2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\M\left(1+\frac{3}{\sqrt{2}};2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{array}\right.$$

BT 18. Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và các điểm A, B, M, N như hình (1). Biết rằng trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy có $A(-4;1); B(4;1)$, phương trình Δ_1: $\sqrt{3}.x - y + 2\sqrt{3} = 0$ và phương trình Δ_2: $\sqrt{3}.x - y - \sqrt{3} = 0$. Tìm giá trị bé nhất của tổng $AM + MN + NB$.



Lời giải và đáp số

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2, A' là điểm đối xứng của A qua Δ_1.



Khi đó:

$(AM + MN + NB)_{min}$
$= A'B' + d(D_1;D_2)$

Tọa độ:

$$A'\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2};\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right), B'\left(\frac{2\sqrt{3}-11}{4};\frac{2+9\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$A'B' = \frac{\sqrt{139}}{2}, \quad d(\Delta_1;\Delta_2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

BT 19. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với các đỉnh A(2; 6), B(−1; 1), C(−6; 3). Gọi D và E là chân các đường phân giác của góc A trên đường thẳng BC. Tính diện tích tam giác DAE.

Lời giải và đáp số

Ta có: $(AB): 5x - 3y + 8 = 0;\ (AC): 3x - 8y + 42 = 0; (BC): 2x + 5y - 3 = 0$

Phương trình các đường phân giác của góc A:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{34}} - \frac{3}{\sqrt{73}}\right)x + \left(\frac{-3}{\sqrt{34}} + \frac{8}{\sqrt{73}}\right)y = \left(\frac{42}{\sqrt{73}} - \frac{8}{\sqrt{34}}\right);$$

$$\left(\frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{3}{\sqrt{73}}\right)x + \left(\frac{-3}{\sqrt{34}} - \frac{8}{\sqrt{73}}\right)y = \left(\frac{-42}{\sqrt{73}} - \frac{8}{\sqrt{34}}\right)$$

Giao điểm của các đường phân giác với (BC) là:

$$D(9,746112158; -3,298444863), E(-3,02816344; 1,811265376)$$

$$S_{DAE} = \frac{1}{2} AD \times AE \approx \frac{1}{2} \times 12,10220354 \times 6,544304801$$

$$S_{DAE} \approx 39,60025435$$

Chủ đề 10:
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Cơ sở lý thuyết

1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc đáy

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao.
- Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

2. Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

- Đối với khối chóp có mặt bên vuông góc đáy ta thường dùng định lý sau để xác định đường cao

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\perp(\beta)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\\a\subset(\alpha)\\a\perp d\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(\beta)$$

3. Khối chóp đều

a) Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau

b) Kết quả: Trong hình chóp đều

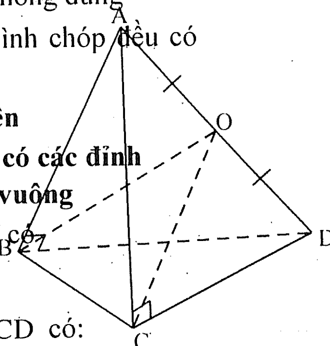
- Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau
- Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau

Chú ý:

- Đề bài cho hình chóp tam giác đều (tứ giác đều) ta hiểu là hình chóp đều
- Hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là đa giác đều vì hình chóp tam giác đều thì bản thân nó có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nói một cách khác, hình chóp tam giác đều thì suy ra hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại là không đúng
- Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

4. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

a) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có các đỉnh nhìn hai đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông



Chẳng hạn cho tứ diện ABCD có:

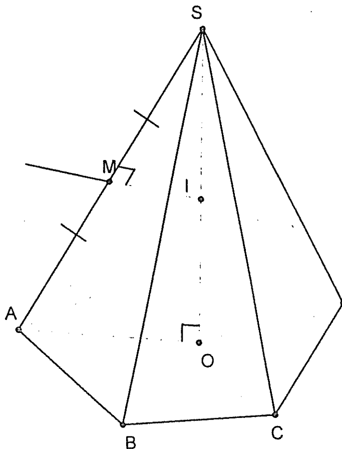
$\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=90^0$

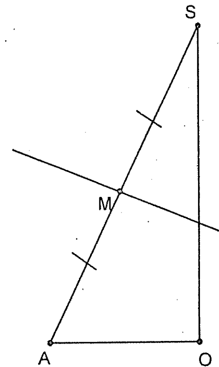
Lúc đó mặt cầu ngoại tiếp ABCD có:

Tâm O (O là trung điểm của AD) và bán kính $R = \frac{AD}{2}$. Thật vậy, hai tam giác vuông ABD và ACD có chung cạnh huyền AD .

Nên $OA = OB = OC = OD = \frac{AD}{2}$.

b) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có các cạnh bên bằng nhau





Hình chóp S.ABC... có các cạnh bên bằng nhau $(SA = SB = SC = ...)$

- Vẽ $SO \perp (ABC...)$, SO là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- Trong mặt phẳng (SOA), đường trung trực của SA cắt SO tại I

  $\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC...
- Bán kính của mặt cầu nói trên là $R = IA = IS$ và ta có:

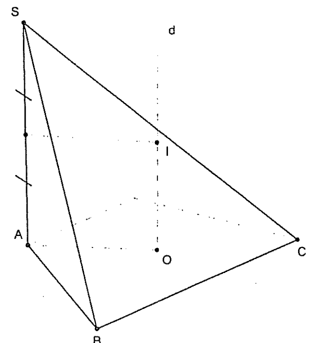
  $SA.SM = SO.SI$ (Hai tam giác SAO và SIM đồng dạng)

  Do đó: $R = SI = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO}$

c) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Hình chóp S.ABC ... có

$\begin{cases} \text{* Một cạnh bên vuông góc với đáy, chẳng han} \\ SA \perp (ABC) \\ \text{* ABC... nội tiếp đường tròn(O)} \end{cases}$



- Vẽ trục đường tròn ngoại tiếp ABC ...

đó là đường thẳng d qua O và vuông góc với (ABC) .

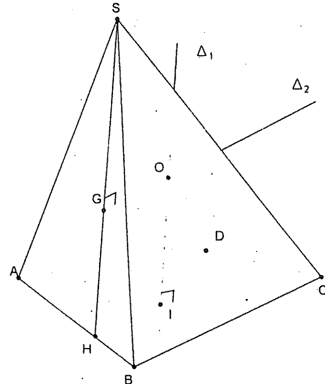
- Trong (d,SA), đường trung trực của SA cắt d

tại I $\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC ...

- Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{AO^2 + OI^2} = \sqrt{AO^2 + \frac{SA^2}{4}}$

d) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy

Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có một mặt bên vuông góc với mặt đáy(Giả sử là $(SAB) \perp (ABCD)$) ta thực hiện như sau:



- Dựng trục Δ_1 của đường tròn nội tiếp ΔSAB

Dựng trục Δ_2 của đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD

- Ta có Δ_1 và Δ_2 cùng thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 = O$, O là tâm mặt cầu ngoại tiếp.
- Trong cách dựng ta có ΔSGO vuông tại G và $R = OS$

5. Các công thức tính thể tích

- **Thể tích khối chóp:** $V = \frac{1}{3} B \times h$, Với B là diện tích đáy, h là chiều cao
- **Thể tích khối lăng trụ:** $V = B \times h$
- **Thể tích khối cầu:** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, R là bán kính mặt cầu
- **Thể tích khối nón:** $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, R là bán kính đường tròn đáy
- **Thể tích khối trụ:** $V = Bh = \pi R^2 h$, R là bán kính đường tròn đáy

I. CÁC VÍ DỤ ĐIỂN HÌNH THƯỜNG GẶP

Ví dụ 1. Cho tứ diện SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh 3a, mặt phẳng (SBC) vuông với mặt đáy, các góc $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 45^0$. Tính thể tích khối tứ diện SABC và khoảng cách từ trung điểm I của cạnh BC đến mặt phẳng (SAB). Áp dụng với $a = 5,2014\text{cm}$.

(Trích Đề thi HSG MTCT Huế 2014-2015)

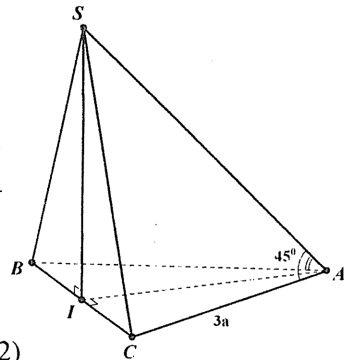
Lời giải và đáp số

Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAC\ (c - g - c) \Rightarrow SB = SC$ hay ΔSBC cân tại S.

$$\left.\begin{array}{l}(SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC\end{array}\right\} \Rightarrow SI \perp (ABC)$$

Đặt $SI = h$ .Ta có $AI = \frac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{SI^2 + AI^2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 27a^2}$



Tam giác SAB có:

$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA.AB\cos 45^0$

$= h^2 + \frac{27a^2}{4} + 9a^2 - 2.\frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 27a^2}.3a.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= h^2 + \frac{63a^2}{4} - \frac{3a}{2}\sqrt{8h^2 + 54a^2}$ (1)

Trong tam giác vuông SBI có $SB^2 = h^2 + \frac{9a^2}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{27}{2}a^2 = \frac{3a\sqrt{h^2 + 54a^2}}{2} \Leftrightarrow h^2 = \frac{27}{8}a^2 \to h = \frac{3a\sqrt{6}}{4}$

Thể tích khối tứ diện SABC là:

$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SI = \frac{1}{3}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a\sqrt{6}}{4} = \frac{27a^3\sqrt{2}}{16}$

Ta có $V_{SABI} = \frac{1}{3}S_{SAB}.d\left(I,(ABI)\right) \Rightarrow d\left(I,(ABI)\right) = \frac{3V_{SABI}}{S_{SAB}}$

Mà

$V_{SABI} = \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{27a^3\sqrt{2}}{32}$;

$S_{SAB} = \frac{1}{2}SA.AB.\sin 45^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{27}{2}a^2 + 27a^2}.3a.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{8}a^2$

Nên $d\left(I,(SAB)\right) = \frac{3V_{SABI}}{S_{SAB}} = \frac{81a^3\sqrt{2}}{32}.\frac{8}{27a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Với $a = 5,2014$ thì $V \approx 335,8300cm^3$ và $d\left(I,(SAB)\right) \approx 5,5169cm$.

Ví dụ 2. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, biết độ dài cạnh bên là $2\sqrt{5}$ cm, đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = \sqrt{5}$ cm, $AC = \sqrt{15}$ cm và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC.

a) Tính thể tích khối chóp $A'BCC'B'$.

b) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.

(thể tích tính theo đơn vị cm³, góc giữa hai đường thẳng làm tròn đến độ, phút)

(Trích Đề thi HSG MTCT 12GDTX, Bộ 2013)

Lời giải và đáp số

a) Gọi H là trung điểm BC

Suy ra $A'H \perp (ABC)$

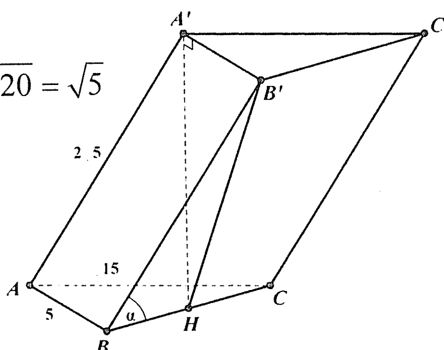
và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$

Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 15$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{15}$

$V_{A'.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

$= \frac{2}{3}A'H.S_{ABC} \approx 11,1803cm^3$



b) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC

Trong tam giác vuông $A'B'H$ tại A' có: $HB' = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = 2\sqrt{5}$

Nên tam giác $BB'H$ cân tại B'

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AA' và BC thì $\widehat{B'BH} = \alpha$

Tính được $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2.2\sqrt{5}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha \approx 75^0 31'$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang

$\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^0$; $AB = 5,12; AD = 2,14; DC = 3,14; SA = 4$

và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD. Tính thể tích của khối chóp S.GCB và khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC).

(Trích Đề th HSG MTCT Quảng Trị 2013)

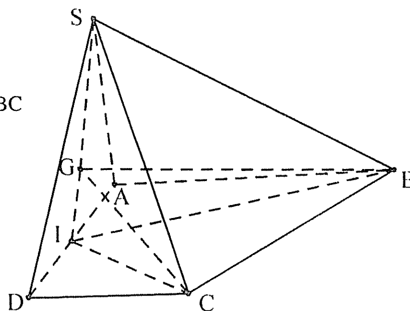
Lời giải và đáp số

Đặt $AB = a; AD = b; DC = c; SA = d$.

Ta có $\frac{V_{SGCB}}{V_{SIBC}} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{SGCB} = \frac{2}{3}V_{SIBC}$

Với $V_{SIBC} = \frac{1}{3}SA.S_{ICB}$,

$S_{IBC} = \frac{1}{2}(a+c)b - \frac{b}{4}(a+c) = \frac{b(a+c)}{4}$



Do đó $V_{SGCB} = \frac{2}{3}V_{SIBC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times d \times \frac{b(a+c)}{4} = \frac{db(a+c)}{18}$

Dùng MTCT ta tính được: $V_{SGCB} \approx 3,9281$

Ta có:

$$SB = \sqrt{a^2 + d^2}; CB = \sqrt{b^2 + (a-c)^2}$$
$$SC = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}; p = \frac{SB + SC + BC}{2}$$

$$S_{SCB} = \sqrt{p(p - SB)(p - SC)(p - BC)}$$

$$d(G;(SBC)) = \frac{3V_{SDBC}}{S_{SCB}} \approx 1,4729$$

Ví dụ 4. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 5; AD = BC = 6; AC = BD = 7$. Xác định tâm, tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện ABCD.

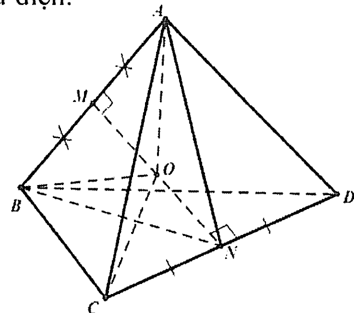
(Trích Đề thi HSG MTCT Bảng A, Quảng Ninh 2012)

Lời giải và đáp số

Tứ diện ABCD có các mặt là các tam giác bằng nhau. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Ta có $BN = AN; CM = DM$ nên MN vuông góc với AB và CD. Gọi O là trung điểm của MN.

Ta có $OA = OB, OC = OD$ mà $\Delta OMB = \Delta ONC$ nên OB=OC. Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện

Mặt khác, $\Delta ABC = \Delta ABD = \Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow$ các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đó có bán kính bằng nhau. Các đường tròn đó đều nằm trên một mặt cầu tâm O nên khoảng cách từ O đến các mặt phẳng chứa các đường tròn đó là bằng nhau. Suy ra O cũng là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện.



Ta có

$$BN^2 = \frac{BC^2 + BD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{145}{4}$$
$$\Rightarrow MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{30}$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là:

$$R = OB = \sqrt{OM^2 + MB^2} = \frac{\sqrt{55}}{2} \text{ (cm)}$$

Gọi S, p lần lượt là diện tích và chu vi tam giác BCD;

r' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD

$$S = \sqrt{p(p - BC)(p - CD)(p - BD)} = 6\sqrt{6}\ ;\ r' = \frac{BC.CD.BD}{4S} = \frac{35}{4\sqrt{6}}$$

Bán kính mặt cầu nội tiếp khối tứ diện: $r = \sqrt{R^2 - r'^2} = \sqrt{\frac{95}{96}} = \frac{\sqrt{570}}{24}(cm)$

Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABC nội tiếp trong mặt cầu có bán kính $R=\sqrt[3]{2011{,}2012}$ dm. Biết rằng $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=60^0;\widehat{BSC}=90^0;$ $\widehat{CSA}=120^0$. Tính gần đúng (với 5 chữ số thập phân sau dấu phẩy) thể tích của khối chóp S.ABC.

(Trích Đề thi HSG MTCT Bảng A, Quảng Ninh 2012)

Lời giải và đáp số

Đặt $SA=SB=SC=a$.

Ta có $AB=a;BC=a\sqrt{2};AC=a\sqrt{3}$.

Nhận thấy: $AB^2+BC^2=AC^2$

nên tam giác ABC vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của AC thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $BH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SH=SA\cos 60^0=\dfrac{a}{2}$

Lại thấy: $BH^2+SH^2=SB^2\Rightarrow \Delta SHB$ vuông tại H hay $SH\perp BH$ (1)

Mà tam giác SAC cân tại S nên $SH\perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SH\perp(ABC)$ hay SH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi O là tâm mặt cầu ngọa tiếp hình chóp S.ABC. Ta có O nằm trên SH và OA=OS. Tam giác SAO cân tại O và có $\widehat{SAH}=60^0$ nên là tam giác đều.

Suy ra $SA=OA=R=\sqrt[3]{2011{,}2012}$.

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AB.BC=\frac{1}{6}\frac{a}{2}.a.a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\approx 237{,}02233$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=7\text{dm}, AD=8\text{dm}, SA=9\text{dm}$. Tính gần đúng số đo góc tạo bởi mặt phẳng (SBD) với mặt đáy $(ABCD)$ của hình chóp.

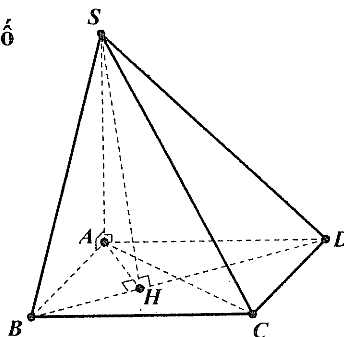
Lời giải và đáp số

Gọi H là hình chiếu của A lên BD.

Ta có:

$$\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ AH\perp BD\\ SH\perp BD\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[(SBD),(ABCD)\right]=\widehat{SHA}$$



Trong tam giác vuông ABD có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{49} + \frac{1}{64} = \frac{113}{3136} \Rightarrow AH \approx 5,2680$$

Ta có: $\tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} \approx \frac{9}{5,2680} = \frac{750}{439} \Rightarrow \widehat{SHA} \approx 59^0 39'29''$

Ví dụ 7. Cho hình chóp ngũ giác đều có cạnh đáy $a = 7,23$ cm, cạnh bên $b = 9,25$ cm.

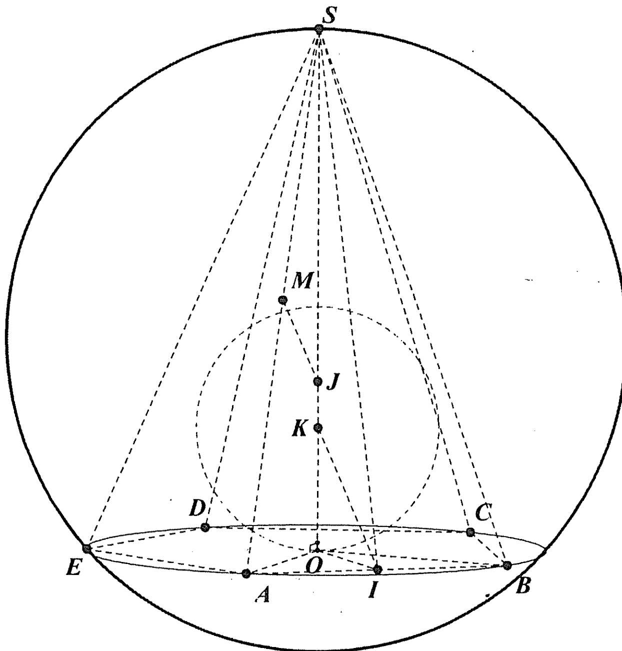
a) Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp.

b) Tính gần đúng số đo (độ, phút, giây) của góc hợp bởi mỗi mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

c) Tìm thể tích phần ở giữa hình cầu nội tiếp và hình cầu ngoại tiếp hình chóp đều đã cho.

(Trích Đề thi HSG MTCT Đồng Tháp 2013)

Lời giải và đáp số



a) Đưa $a = 7,23 \rightarrow A$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy: $OA = R = \frac{a}{2\sin 36^0} \approx 6,150205344 \rightarrow B$

Chiều cao $h = \sqrt{b^2 - R^2} \approx 6,909231088 \rightarrow C$

Tính: $OI = \frac{a}{2\tan 36^0} = 4,975620643 \rightarrow X$

Trung đoạn: $d = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2\tan 36^0}\right)^2} \approx 8.514356993(cm) \to D$

$S_{xq} = 5 \times \frac{1}{2}ad = \frac{5}{2}A \times D \approx 153,8970026cm^2$

$V_{chop} = \frac{1}{3} \times 5 \times \frac{1}{2}AB \times OI \times h = \frac{5}{6}A \times X \times C \approx 207,1257198cm^3$

b) Góc tạo bởi mặt bên SAB với mặt đáy ABCDE là $\widehat{SIO} = \alpha$.

Ta có: $\sin\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow \alpha \approx 54^0 14'27''$

c) Phân giác góc SIO cắt SO tại K là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp đều có bán kính $r_1 = KO$:

$r_1 = KO = OI\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)\right)$; $r_1 = KO \approx 2,548389164(cm)$

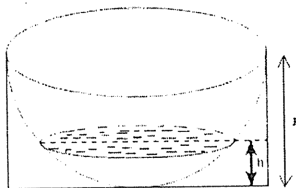
Trung trực đoạn SA trong mặt phẳng SAO cắt SO tại J. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều có tâm J, bán kính SJ.

$\frac{SM}{SJ} = \frac{SO}{SA} \Rightarrow r = SJ = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{b^2}{2h} \Rightarrow r \approx 6.191897399$

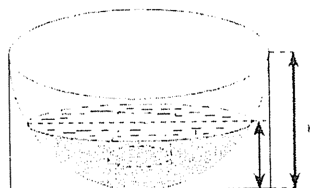
$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - r_1^3\right) \Rightarrow V \approx 925.0727746cm^3$

Ví dụ 8. Một chậu nước hình bán cầu bằng nhôm có bán kính $R = 10cm$, đặt trong một khung hình hộp chữ nhật (Hình 1). Trong chậu có chứa sẵn một khối nước hình chõm cầu có chiều cao $h = 4cm$. Người ta bỏ vào chậu một viên bi hình cầu bằng kim loại thì mặt nước dâng lên vừa phủ kín viên bi (hình 2). Tính bán kính viên bi (Kết quả làm tròn đến 4 chữ số thập phân)

Cho biết công thức tính thể tích khối chỏm cầu của hình cầu $(O;R)$, có chiều cao *h* là: $V_{chomcau} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$



Hình 1



Hình 2

(Trích Đề thi HSG MTCT, Huế 2009-2010)

Lời giải

Gọi x là bán kính viên bi hình cầu. Điều kiện: $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$.

Thể tích khối nước hình chỏm cầu khi chưa thả viên bi vào:

$$V_1 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = 16\pi\left(10 - \frac{4}{3}\right) = \frac{416\pi}{3}.$$

Khi thả viên bi vào thì khối chỏm cầu gồm khối nước và viên bi có thể tích là:

$$V_2 = \pi(2x)^2\left(R - \frac{2x}{3}\right) = \frac{4\pi x^2(30-2x)}{3}.$$

Ta có phương trình:

$$V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi x^3 \Leftrightarrow 4\pi x^2(30-2x) - 416\pi = 4\pi x^3 \Leftrightarrow 3x^3 - 30x^2 + 104 = 0.$$

Thực hiện quy trình ấn phím:

MODE 5 4 3 = − 3 0 = 0 = 1 0 4 = =

Ta được nghiệm thứ nhất phương trình là: $x_1 \approx 9,6259 > 5$ (loại)

Ấn tiếp phím =, ta được nghiệm thứ hai phương trình là: $x_2 \approx 2,0490 < 5$

Ấn tiếp phím =, ta được nghiệm thứ ba phương trình là: $x = -1,7198 < 0$ (loại)

Vậy bán kính viên bi là $r \approx 2,0490$.

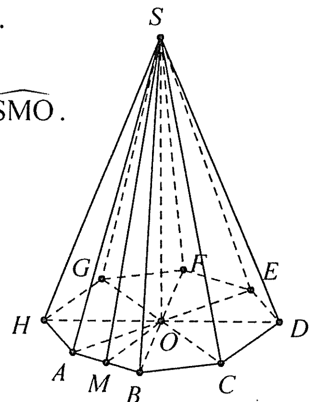
Ví dụ 9. Cho hình chóp bát giác đều có chiều cao gấp 3 lần cạnh đáy.

a) Tính góc α (độ, phút, giây) tạo bởi mỗi mặt bên và mặt đáy và góc β (độ, phút, giây) tạo bởi mỗi cạnh bên và mặt đáy.

b) Cho cạnh đáy của hình chóp bát giác đều là $a = 12,34\text{cm}$. Tính diện tích toàn phần của hình chóp đều đã cho.

Lời giải và đáp số

Cho hình chóp bát giác đều S.ABCDEFGH có cạnh đáy bằng *a*. M là trung điểm cạnh đáy AM. Tâm của đáy là O.



Theo giả thiết: $SO = 3a$.

Góc tạo bởi mặt bên SAB và mặt phẳng đáy là : $\alpha = \widehat{SMO}$.

Góc tạo bởi mỗi cạnh bên và mặt đáy là : $\beta = \widehat{SAO}$.

Ta có : $OM = \dfrac{a}{2\tan 22^0 30'}$

Suy ra : $\tan\alpha = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{3a}{\dfrac{a}{2\tan 22^0 30'}} = 6\tan 22^0 30'$

$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(6\tan 22^0 30'\right) \approx 68^0 4'54''$

Ta có $OA = \dfrac{a}{2\sin 22^0 30'} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(6\sin 22^0 30'\right) \approx 66^0 27'57''$

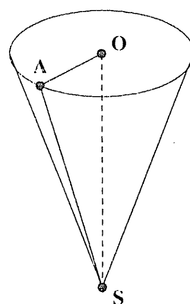
b) Ta có: $S_đ = S_{xq}\cos\alpha \Rightarrow S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \left(\frac{1}{\cos\alpha}+1\right)S_đ$.

$$S_{tp} = \frac{2a^2}{\tan 22^0 30'}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+1\right) \approx 1969,68185\left(cm^2\right)$$

Ví dụ 10. Khi sản xuất cái phễu hình nón (không có nắp) bằng nhôm, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm phễu là ít nhất, tức là diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất. Tính gần đúng diện tích xung quanh của phễu khi ta muốn có thể tích của phễu là $1dm^3$.

(Đề thi HSG MTCT Khối 12 BTTHPT, Huế 2009-1010)

Giải



Gọi $x = OA(dm)$ là bán kính đáy của hình nón $(x > 0)$, $h = SO$ là chiều cao, $l = SA$ là đường sinh của hình nón.

Ta có thể tích của hình nón là: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = 1$ (giả thiết)

$\Rightarrow h = \frac{3}{\pi x^2}$ (1)

Đường sinh của hình nón:

$$l = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{x^2 + \frac{9}{\pi^2 x^4}} = \sqrt{\frac{\pi^2 x^6 + 9}{\pi^2 x^4}} = \frac{\sqrt{\pi^2 x^6 + 9}}{\pi x^2}$$

Diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S = \pi x l = \pi x.\frac{\sqrt{\pi^2 x^6 + 9}}{\pi x^2} = \frac{\sqrt{\pi^2 x^6 + 9}}{x}, (x > 0)$$

Ta có $S'(x) = \dfrac{\dfrac{3\pi^2 x^5}{\sqrt{\pi^2 x^6 + 9}}x - \sqrt{\pi^2 x^6 + 9}}{x^2} = \dfrac{2\pi^2 x^6 - 9}{x^2\sqrt{\pi^2 x^6 + 9}}$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}$ (vì $x > 0$).

Bảng biến thiên:

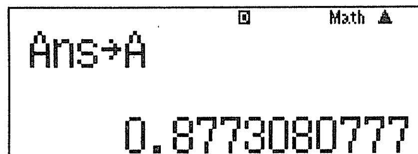
x	$-\infty$	0		$\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}$		$+\infty$
S'(x)			-	0	+	
S(x)			↘	4,1881	↗	

Do đó $x=\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}\approx 0,8773080777$ là điểm cực tiểu của hàm số

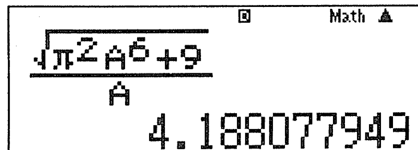
và $\min S(x)=S\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}\right)\approx 4,1881\text{dm}^2$.

Lưu ý: Để tính giá trị $x=\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}}\approx 0,8773080777$ trên máy tính ta ấn lần lượt các phím sau: [SHIFT] [$x^{\blacksquare}$] [6] [▶] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [9] [▼] [2] [SHIFT] [$\times 10^x$] [$x^2$] [=]

Lưu giá trị này vào biến nhớ A bằng cách [SHIFT] [RCL] (STO) [(−)] (A)



Sử dụng chức năng [CALC] để tính giá trị diện tích nhỏ nhất của cái phễu như sau:
[$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [$\sqrt{\blacksquare}$] [SHIFT] [$\times 10^x$] ($\pi$) [$x^2$] [ALPHA] [(−)] (A) [$x^{\blacksquare}$] [6] [▶] [+] [9] [▼] [ALPHA] [(−)] (A) [=]



Ví dụ 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $\sqrt[3]{2014,2015}$ SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy

a) Tính $d\left(A,(SAC)\right)$

b) Xác định tam hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD và tính thể tích khối cầu đó

Lời giải và đáp số

a) Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow SH\perp AB$

Ta dễ dàng chứng minh được

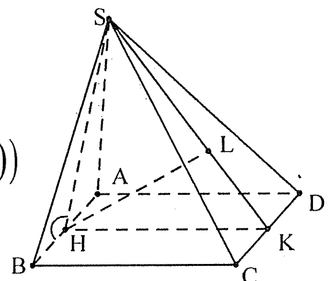
$SH\perp(ABCD)$ và $AB//(SCD)$

Do đó: $d\left(A,(SCD)\right)=d\left(AB,(SCD)\right)=d\left(H,(SCD)\right)$

Gọi K là trung điểm của CD $\Rightarrow CD\perp HK$ và có

$CH\perp SH\Rightarrow CD\perp(SHK)\Rightarrow(SHK)\perp(SCD)$

Mặt khác: $(SHK)\cap(SCD)=SK$.



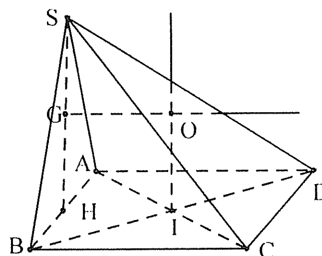
Từ H vẽ HL vuông góc với SK tại L $\Rightarrow$ HL $\perp (SCD)$ tại L

$\Rightarrow d(H,(SCD)) = HL$. Tam giác ΔSHK vuông tại H, HL là đường cao.

$$d(H,(SCD)) = HL = \frac{\sqrt[3]{2014,2015} \times \sqrt{21}}{7} \approx 8,2676 \text{ (đvđd)}$$

b) Gọi I là tâm hình vuông, G là trọng tâm của tam giác SAB ($G \in SH$)

Ta dễ dàng chứng minh được $IH \perp (SAB)$



Dựng trục Δ_1 của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD (với Δ_1 đi qua I)

Dựng trục Δ_2 của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB (với Δ_2 đi qua G)

$\Rightarrow \Delta_1$ và Δ_2 cùng thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

$$\Rightarrow \Delta_1 \cap \Delta_2 = O \Rightarrow \begin{cases} O \in \Delta_1 \\ O \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC = OD \\ OA = OB = OS \end{cases}$$

$\Rightarrow$ O cách đều các đỉnh của hình chóp S.ABCD.

$\Rightarrow$ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Ta có: $OS = \sqrt{SG^2 + OG^2} = \dfrac{\sqrt[3]{2014,2015} \times \sqrt{21}}{6} \approx 9,6455$

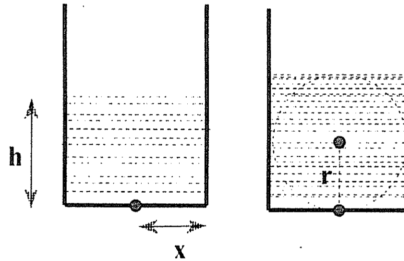
Vậy: $R \approx 9,6455 \text{ (dvdd)}$; $V = \dfrac{7\pi \times 2014,2014 \times \sqrt{21}}{54} \approx 3758,95144 \text{(dvtt)}$

II. BÀI TẬP THỰC HÀNH

BT 1. Một thùng hình trụ có đường kính đáy (bên trong) bằng 12,24 cm đựng nước cao lên 4,56 cm so với mặt trong của đáy. Một viên bi hình cầu được thả vào trong thùng thì mực nước dâng lên sát với điểm cao nhất của viên bi (nghĩa là mặt nước là tiếp diện của mặt cầu). Hãy tính bán kính của viên bi.

Hướng dẫn giải

Gọi R là bán kính đáy của hình trụ; x bán kính hình cầu; h là chiều cao ban đầu của cột nước



Ta có phương trình:

$$\pi R^2 h + \frac{4}{3}\pi x^3 = \pi R^2.2x \Leftrightarrow 4x^3 - 6R^2 x + 3R^2 h = 0,\ (0 < x < R)$$

Dùng MTCT giải phương trình

$$4x^3 - 224,7264x + 512,376192 = 0 (0 < x \le 6,12)$$

Ta có: $x_1 \approx 2,588826692$; $x_2 \approx 5,857864771$.

BT 2. Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt (ABC), SB = 8 cm, SC = 15 cm, BC = 12 cm và mặt (SBC) tạo với mặt (ABC) góc $68^0 52'$. Tính gần đúng diện tích toàn phần của hình tứ diện SABC.

Hướng dẫn giải

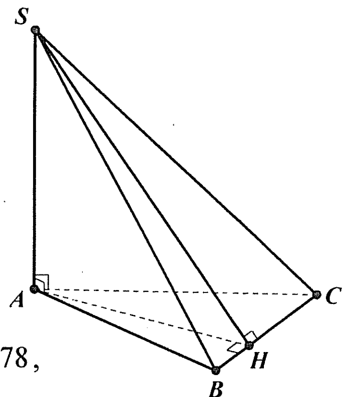
Ta có:

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{(SBC);(ABC)}\right] = \widehat{SHA}$$

Áp dụng công thức Hê-rong trong tam giác SBC :

$$S_{SBC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \approx 47,81147875 (cm^2)$$

Mặt khác:



$$S_{SBC} = \frac{1}{2} AH.BC \Rightarrow AH = \frac{2S_{SBC}}{BC} \approx 7,968579791$$

Ta có: $SA = AH \tan\left(68^0 52'\right) \approx 20,61533936$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SA.AB = \frac{1}{2} SA.\sqrt{SB^2 - SA^2}$$

$\approx 10,99666955$

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} SA.AC = \frac{1}{2}\sqrt{SC^2 - SA^2} \approx 48,42009878,$$

$$S_{ABC} = S_{SBC} \cos 68^0 52' \approx 17,23792748$$

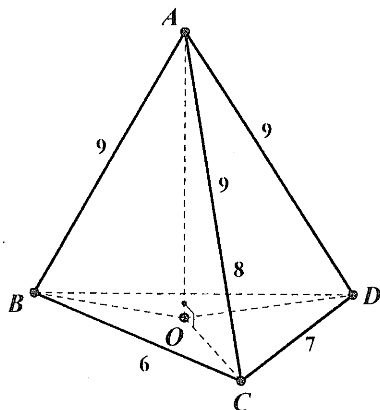
Vậy diện tích toàn phần của hình tứ diện là: $S_{tp} \approx 124,4661746\ (cm^2)$

BT 3. Tính gần đúng thể tích khối tứ diện ABCD nếu BC = 6 dm, CD = 7 dm, BD = 8 dm, AB = AC = AD = 9 dm.

Hướng dẫn giải

Tính diện tích của tam giác BCD theo ba cạnh nhờ công thức Hê-rông.

Đặt $p = \dfrac{AB + CD + BD}{2} = 10{,}5\text{dm}$.



Ta có ·

$S_{BCD} = \sqrt{p(p - BC)(p - BD)(p - CD)}$

$= \dfrac{21\sqrt{15}}{4} \approx 20{,}3332$

Mặt khác:

$S_{BCD} = \dfrac{BC \times CD \times BD}{4R}$

$\Rightarrow R = \dfrac{BC \times CD \times BD}{4S_{BCD}} \approx 4{,}1312$

Vì AB = AC = AD nên chân đường cao hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy BCD.

Từ đó: $h = \sqrt{AB^2 + R^2} = 9{,}9029$

Vậy $V = \dfrac{1}{3} h \times S_{BCD} \approx 67{,}1192\text{dm}^3$.

BT 4. Cho tứ diện *ABCD* có $AB = 6\sqrt{5}$; $CD = 6\sqrt{7}$ và các cạnh còn lại bằng $\sqrt{174}$.

a) Tính gần đúng bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD*.

b) Tính gần đúng thể tích của khối tứ diện *ABCD*.

Hướng dẫn giải

a) Gọi *M, N* là trung điểm của *AB* và *CD*.

Khi đó *MN* vuông góc với cả *AB* và *CD* và tâm mặt cầu *O* phải nằm trên đoạn *M*N. Đặt $OM = x$

- Tính được $MN = \sqrt{66} \Rightarrow ON = \sqrt{66} - x$
- Ta có $R^2 = x^2 + AM^2 = (\sqrt{66} - x)^2 + ND^2$

Tìm ra $x = \dfrac{42}{\sqrt{66}}$. Từ đó tìm ra *R*

b) $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.AB.S_{MCD} = \dfrac{1}{6}.AB.MN.CD$

Đáp số: a) $R \approx 8{,}4692$ b) $V_{ABCD} \approx 288{,}3748$ (đvtt)

BT 5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy $a = 12,54(cm)$, các cạnh bên nghiêng với đáy một góc $\alpha = 72^0$.

a) Tính thể tích hình cầu (S_1) nội tiếp hình chóp S.ABCD (Hình cầu tâm I cách đều các mặt bên và mặt đáy của hình chóp một khoảng bằng bán kính của nó).

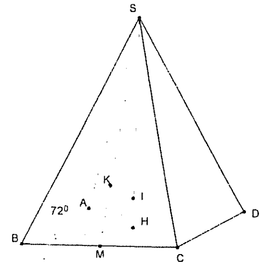
b) Tính diện tích của hình tròn tiết diện của hình cầu (S_1) cắt bởi mặt phẳng đi qua các tiếp điểm của mặt cầu (S_1) với các mặt bên của hình chóp S.ABCD (Mỗi tiếp điểm là hình chiếu của tâm I lên một mặt bên của hình chóp. Tâm của hình tròn tiết diện là hình chiếu vuông góc H của I xuống mặt phẳng cắt).

Hướng dẫn giải

a) Ta có

$$SH = 27.29018628;$$

$$IH = \frac{SH.MH}{MH + MS} = 4.992806526 = R$$



(Với R bán kính mặt cầu nội tiếp).

Thể tích hình cầu (S_1):

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 521.342129(cm^3).$$

$SM \approx 28,00119939$; $MH = 6,27$; $IK = IH$

b) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng đi qua các tiếp điểm của (S_1) với các mặt bên của hình chóp:

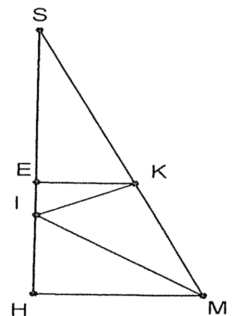
$$d = EI = \frac{IH^2}{SH - IH} = 4.866027997$$

Bán kính đường tròn giao tuyến:

$$r = EK = \sqrt{R^2 - d^2} \approx 1,117984141$$

Diện tích hình tròn giao tuyến:

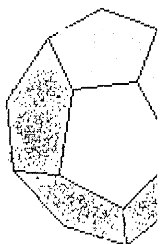
$$S \approx 74,38733486(cm^2)$$



BT 6. Tính tỉ số giữa cạnh của khối đa diện đều 12 mặt (hình ngũ giác đều) và bán kính mặt cầu ngoại tiếp đa diện đó.

Lời giải và đáp số

Giả sử các mặt hình ngũ giác đều có độ dài cạnh bằng a. Ta thấy mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện được xác định bởi 4 đỉnh bất kỳ không đồng phẳng. Ta có thể tính ra được bán kính R của quả cầu ngoại tiếp đa diện dựa trên 4 điểm là: một đỉnh tùy ý và 3 đỉnh khác nằm trên ba cạnh kề với đỉnh này.



Rõ ràng, 4 điểm đã nói lập thành một " hình chóp cân" có đáy là tam giác đều và 3 mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Cạnh của tam giác đều ở đáy lại là

đường chéo của mặt ngũ giác đều, cho nên tính được nhờ định lý hàm số cô-sin, cụ thể là

$$b = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos 108^0} = a\sqrt{2(1 - \cos 108^0)}$$

Bán kính vòng tròn ngoại tiếp tam giác đều được tính qua cạnh theo công thức:

$$r = \frac{b}{2\cos 30^0} = \frac{b}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2(1 - \cos 108^0)}{3}}$$

Số đo góc a giữa cạnh của hình chóp cân và mặt phẳng đáy được xác định nhờ công thức:

$$\cos a = \frac{r}{a} = \sqrt{\frac{2(1 - \cos 108^0)}{3}}$$

Lưu ý rằng đường vuông góc hạ từ đỉnh của "hình chóp cân" xuống mặt đáy của nó sẽ đi qua tâm của mặt cầu ngoại tiếp đa giác, cho nên bán kính R của mặt cầu này được xác định từ công thức $R = \frac{a}{2\sin a}$, và do đó

$$\frac{a}{R} = 2\sin a = 2\sqrt{1 - \cos^2 a} = 2\sqrt{\frac{1 + 2\cos 108^0}{3}} \approx 0,7136441807$$

BT 7. Tứ diện ABCD có AB = CD = 2008cm, AC = BD = 2009cm và AD = BC = 2010cm. Tính gần đúng giá trị thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Hướng dẫn giải

Đặt AB = x, AC = y, AD = z

Tứ diện ABCD là tứ diện gần đều nên hình hộp ngoại tiếp là một hình hộp chữ nhật.

Gọi a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật thì:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD xác định bởi:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Thể tích khối cầu: $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi}{24}\sqrt{2(x^2 + y^2 + x^2)^3}$

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

$V \approx 7799655640,34347cm^3$

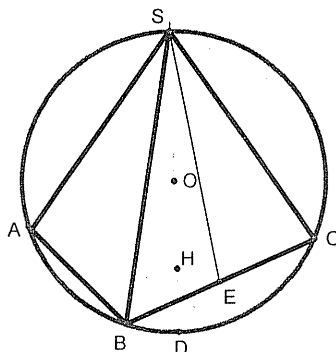
BT 8. Cho hình chóp *S.ABC* nội tiếp trong một mặt cầu có bán kính $R = \sqrt[3]{10}$. Biết rằng $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = \widehat{BSC} = 40^0$. Tính gần đúng thể tích của khối chóp *S.ABC*.

Lời giải và đáp số

Ta có $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SAC \Rightarrow \Delta ABC$ đều

Gọi *H* là hình chiếu của *S* trên (*ABC*) thì *H* là tâm của tam giác đều *ABC* và *SH* đi qua tâm *O* của mặt cầu.

SH cắt mặt cầu tại *D* thì ΔSAD vuông tại *A*.



Đặt $\ell = SA$. Ta có $SH = \dfrac{\ell^2}{2R}$ (1)

Gọi *E* là trung điểm của *BC*, ta có:

$$BC = 2BE = 2\ell.\sin\frac{\alpha}{2}\ (\alpha = 40^0)$$

$$AH = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2\ell.\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \ell.\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\ (2)$$

Từ (1) và (2) tìm ra $\ell = 2R\sqrt{1 - \dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}SH.\frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^3.\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$V_{S.ABC} \approx 3,8490$ (dvtt)

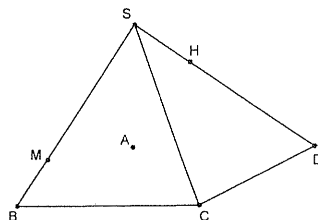
BT 9. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là một hình vuông cạnh bằng 25, cạnh bên *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*) và góc giữa *SC* tạo với mặt phẳng (*SAB*) bằng 11^0. Gọi *M* là một điểm nằm trên cạnh *SB* sao cho $MS = 3MB$. Tính giá trị gần đúng khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng (*SCD*).

Lời giải và đáp số

Từ giả thiết ta có góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB} = 11^0$

Kẻ $AH \perp SD$ tại H.

Ta có:



$$\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA\ (\text{do}\ SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$

$\Rightarrow AH \perp (SCD)$

Lại có: $AB//CD \Rightarrow AB//(SCD)$

Suy ra khoảng cách từ *M* đến mp(*SCD*) được tính bởi công thức:

$$d=\frac{3}{4}d[B,(SCD)]=\frac{3}{4}d[A,(SCD)]=\frac{3}{4}AH=\frac{3}{4}.\frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}$$

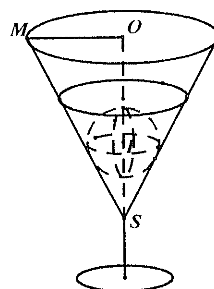
Chú ý: Có thể tính theo công thức: $d=\frac{V_{M.SCD}}{S_{SCD}}$

Dùng MTCT

$$SB=\frac{25}{\tan 11^0}\to A,\ B=\sqrt{A^2-625}$$

Nhập biểu thức: $\frac{75.B}{4\sqrt{B^2+625}}$ và [=] ta được kết quả cần tìm

BT10. Cho cốc nước như hình vẽ, phần phía trên là hình nón đỉnh S, đáy tâm O bán kính R = $\sqrt{5}$ (dm), chiều cao SO = h = $\sqrt{7}$ (dm). Trong cốc nước đã chứamột lượng nước có chiều cao a = 2(dm) sovới đỉnh S. Người ta bỏ vào cốc nước mộtviên bi hình cầu thì nước dâng lên vừa phủ kín quả cầu. Tính gần đúng bán kính của viên bi (làm tròn 4 chữ số thập phân).



Lời giải và đáp số

Thể tích chứa nước trong cốc là: $V_0=\frac{1}{3}\pi r^2 a=\frac{1}{3}\frac{\pi R^2 a^3}{h^2}$ (do $\frac{r}{R}=\frac{a}{h}$)

Khi thả viên bi vào thì nước dâng lên vừa phủ kín quả cầu, tức là mặt nước tiếp xúc mặt cầu.

Gọi x là bán kính của viên bi, ta có: $V_c=\frac{4}{3}\pi x^3$.

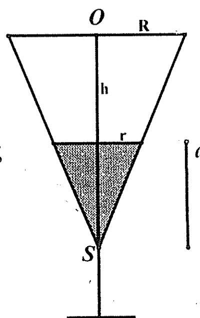
Thể tích khối nón chứa nước và khối cầu là:

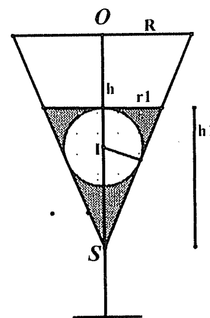
$$V_1=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1=\frac{1}{3}\frac{\pi R^2 h_1^3}{h^2}$$

$$\frac{x}{SI}=\frac{R}{l}\Rightarrow SI=\frac{xl}{R}=\frac{x\sqrt{R^2+h^2}}{R};$$

$$h_1=SI+x=\frac{x}{R}(R+\sqrt{R^2+h^2})$$

$$r_1=\frac{Rh_1}{h}=\frac{x}{h}(R+\sqrt{R^2+h^2}).$$





Do đó: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\frac{\pi R^2 h_1^3}{h^2} = \frac{1}{3}\frac{\pi x^3}{Rh^2}(R+\sqrt{R^2+h^2})^3$

Ta có:

$V_1 - V_0 = V_c \Leftrightarrow \frac{1}{3}\frac{\pi x^3}{Rh^2}(R+\sqrt{R^2+h^2})^3 - \frac{1}{3}\frac{\pi R^2 a^3}{h^2} = \frac{4\pi x^3}{3}$

$\Leftrightarrow x^3(R+\sqrt{R^2+h^2})^3 - a^3R^3 = 4Rh^2x^3$

$\Leftrightarrow \left[(R+\sqrt{R^2+h^2})^3 - 4Rh^2\right]x^3 = a^3R^3$

$x = \dfrac{aR}{\sqrt[3]{(R+\sqrt{R^2+h^2})^3 - 4Rh^2}}$

Với $R=\sqrt{5}; h=\sqrt{7}; (R+\sqrt{R^2+h^2})^3 > 4Rh^2$

Nên bán kính viên bi : $x \approx 0{,}9002268207$ (dm)

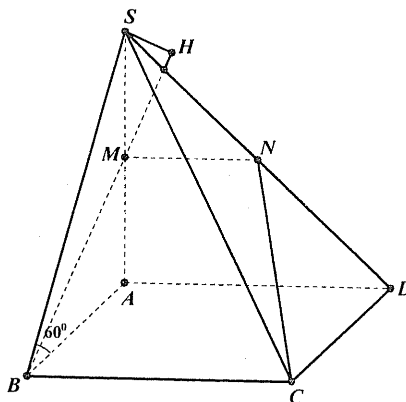
Kết quả: 0,9002 (dm)

BT 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM. Áp dụng $a = \sqrt[2013]{\frac{2015}{2014}}$.

Hướng dẫn

Do (BCM)// AD nên mặt phẳng này cắt mp(SAD) theo giao tuyến MN // AD

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp BM$. Tứ giác BCMN là hình thang vuông có BM là đường cao.



Ta có $SA = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$,

$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{MN}{2a} = \frac{a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow MN = \frac{4a}{3}$

và $BM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$;

$$S_{BCMN} = \frac{BC+MN}{2}BM = \left(\frac{2a+\frac{4a}{3}}{2}\right)\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}.$$

Hạ $SH \perp BM$ và $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$. Vậy $SH \perp (BCMN) \Rightarrow SH$ là đường cao của khối chóp $S.BCNM$.

Trong tam giác SBA ta có $SB = 2a$, $\frac{AB}{SB} = \frac{AM}{MS} = \frac{1}{2}$.

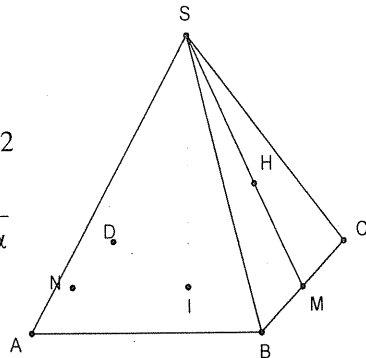
Vậy BM là phân giác của $\widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBH} = 30^0 \Rightarrow SH = SB.\sin 30^0 = a$.

Gọi V là thể tích chóp S.BCNM ta có $V = \frac{1}{3}SH.S_{BCMN} = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$.

Với $a = \sqrt[2013]{\frac{2015}{2014}}$ thì $V \approx 0,6415$ (đvđd)

BT 13. Hình chóp tứ giác đều SABCD có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2. Với giá trị nào của góc α giữa mặt bên và mặt đáy của chóp thì thể tích của chóp nhỏ nhất?

Hướng dẫn giải



Gọi M, N là trung điểm BC, AD, gọi H là hình chiếu vuông góc từ N xuống SM.

Ta có:

$\widehat{SMN} = \alpha, d(A;(SBC)) = d(N;(SBC)) = NH = 2$

$\Rightarrow MN = \frac{NH}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha} \Rightarrow S_{ABCD} = MN^2 = \frac{4}{\sin^2\alpha}$

$SI = MI.\tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{4}{3.\sin^2\alpha.\cos\alpha}$

Ta co:

$$\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.2\cos^2\alpha \le \frac{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{3} = \frac{2}{3}$$

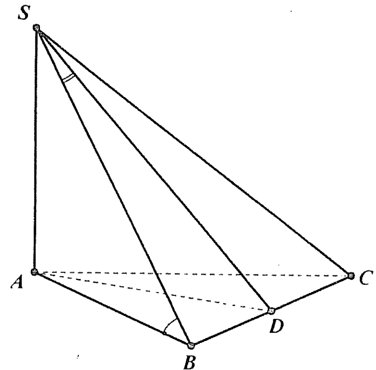
$$\Rightarrow \sin^2\alpha.\cos\alpha \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$V_{SABCD}\text{ min} \Leftrightarrow \sin^2\alpha.\cos\alpha \text{ max} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dùng MTCT ta tìm được $\alpha \approx 54^0 44'8''$.

BT 14. Cho hình chóp SABC, đáy ABC là tam giác cân tại A có trung tuyến AD = a, hai mặt bên SAB và SAC cùng vuông góc với đáy. Cạnh bên SB hợp với đáy một góc α và hợp với mặt phẳng SAD một góc β. Tính thể tích khối chóp SABC theo a, α, β. Áp dụng $a = 2015; \alpha = 47^0; \beta = 36^0$

Hướng dẫn giải



Ta có :

$$\begin{cases}(SAB)\cap(SAC) = SA\\ (SAB)\perp(ABC)\\ (SAC)\perp(ABC)\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABC);$$

AB là hình chiếu của SB lên mp(ABC) nên

$$\widehat{(SB, (ABC))} = \widehat{SBA} = \alpha$$

Ta có : $\begin{cases}BC\perp AD\\ BC\perp SA\end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAD)$

SD là hình chiếu của SB lên mp(SAD) nên

$$\widehat{(SB, (SAD))} = \widehat{BSD} = \beta$$

Ta có : $SB^2 = SA^2 + AB^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2$ (1)

Mà $SA = SB.\sin\alpha$, $BD = SB.\sin\beta$ (1)

$$\Leftrightarrow SB^2 = SB^2.\sin^2\alpha + a^2 + SB^2.\sin^2\beta$$

$$\Leftrightarrow SB^2 - SB^2.\sin^2\alpha - SB^2.\sin^2\beta = a^2$$

$$\Leftrightarrow SB^2(1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta) = a^2 \Leftrightarrow SB^2(\cos^2\alpha-\sin^2\beta) = a^2$$

$$\Leftrightarrow SB = \frac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}},\quad BD = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}$$

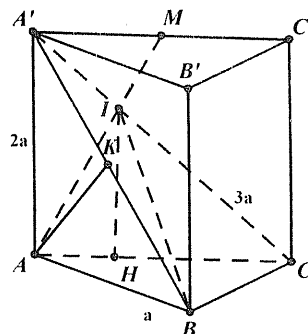
$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}SA = \frac{1}{3}BD.AD.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)} = \frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}$$

Áp dụng $a = 2015; \alpha = 47^0; \beta = 36^0$ ta được $V = 9799614646$ (đvtt)

BT 15. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a, AC' = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A'C', I là giao điểm của AM và A'C. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến (IBC).

Hướng dẫn giải

Hạ $IH \perp AB, (H \in AC) \Rightarrow IH \perp (ABC)$ hay IH là đường cao của tứ diện IABC



$\Rightarrow IH // AA' \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}.$

Ta có

$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = a\sqrt{5},$

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2.$

Thể tích khối tứ diện IABC là $V = \frac{1}{3}IH.S_{ABC} = \frac{4a^3}{9}.$

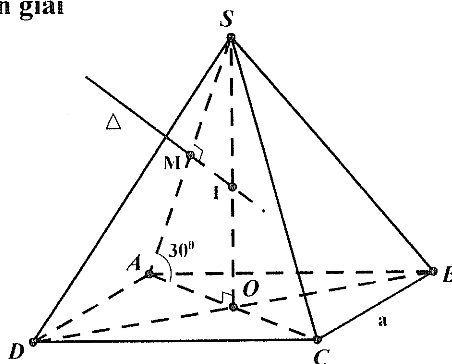
Để ý rằng, khoảng cách từ A đến (IBC) chính bằng khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.

Hạ $AK \perp A'B \Rightarrow AK \perp (A'BC)$. Từ đó, khoảng cách từ A đến (IBC) là

$$AK = \frac{2S_{AA'B}}{A'B} = \frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

BT 16. Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $\sqrt[5]{15}$, cạnh bên hợp với đáy một góc 30^0. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Hướng dẫn giải



Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Ta có SO $\perp$(ABCD), SO là trục của đường tròn ngoại tiếp ABCD.

Theo đề $\left[\widehat{SA,(ABCD)}\right] = \widehat{SAO} = 30^0$

Gọi M là trung điểm của SA .

Trung trực của SA cắt SO tại I

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: SI.SO = SM.SA $\Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SO}$

Đặt $\sqrt[5]{15} = a$

Với $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $AS = \frac{AO}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $SO = SA\sin 30^o = \frac{a}{\sqrt{6}}$

$$\Rightarrow SI = \frac{\frac{a}{\sqrt{6}}a\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Do đó: $V = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\pi a^3 = \frac{8\sqrt{6}}{27}\pi a^3 =\approx 3,9189$ (đvtt)

BT 17. Cho khối chóp S.ABC có đáy ABCD vuông tại A, AB = a, AC = 2a, SA = SB = SC và mặt bên (SAB) hợp với đáy (ABC) một góc 60^0.

a) Tính thể tích của S.ABC.

b) Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác SBC. Tính diện tích của mặt cầu này.

Giải

a) Ta có $SA = SB = SC$ nên S nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi O là trung điểm của BC.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đó: SO chính là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay $SO \perp (ABC)$.

Theo đề: $\left[\widehat{(SAB),(ABC)}\right] = \widehat{SIO} = 60^0$, với K là trung điểm của AB.

Ta có $OK = \frac{AC}{2} = a$. Trong tam giác vuông SKO có $SO = KO\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.S_{ABC} = \frac{1}{3}SO.\frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a.2a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

b) Trong mặt phẳng (SBC), đường trung trực của SC cắt SO tại J

$\Rightarrow$ J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Mặt khác:

$$\begin{cases} JS = JB = JC \text{ (Vì J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC)} \\ JA = JB = JC \text{ (Vì J thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC)} \end{cases}$$

$\Rightarrow JS = JA = JB = JC \Rightarrow$ J là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Lúc đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = SJ$.

ΔSIJ đồng dạng ΔSOC (I là trung điểm của SC)

$$\Rightarrow \frac{JS}{CS} = \frac{SI}{SO} \Leftrightarrow JS = \frac{CS.SI}{SO} = \frac{1}{2}\frac{SC^2}{SO} = \frac{1}{2}\frac{SO^2 + OC^2}{SO} \text{ với}$$

$$\begin{cases} OC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ SO = a\sqrt{3} \end{cases}$$

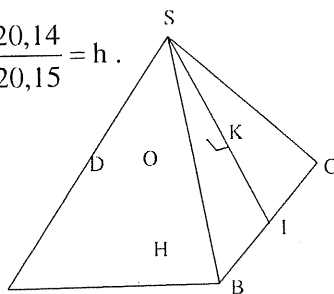
$$\Rightarrow JS = \frac{1}{2}\frac{3a^2 + \frac{5a^2}{4}}{a\sqrt{3}} = \frac{17a}{8\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{17\sqrt{3}a}{24}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{17a}{8\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{289\pi}{48}a^2.$$

Bài 2. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao $SH = \frac{20,14}{20,15}$ và có cạnh đáy bằng $\sqrt[3]{11}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là tâm của hình vuông cạnh $\sqrt[3]{11} = a$, $SH = \frac{20,14}{20,15} = h$.

Gọi I là trung điểm của BC.

Trong ΔSHI phân giác của $\angle SIH$ cắt SH tại O, từ O kẻ $OK \perp SI$, ta có $OK \perp (SBC)$, và OH = OK nên O cách đều mặt đáy và mặt bên (SBC).

Tương tự O cũng cách đều các mặt bên còn lại.

Vậy O là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp và OH = OK = r.

Ta có: $\frac{OH}{OS} = \frac{IH}{IS} \Rightarrow \frac{OH}{OS} = \frac{IH}{IS + IH} \Rightarrow OH = \frac{IH.SH}{SI + IH}$

ΔSHI: $SI^2 = SH^2 + HI^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow SI = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$.

$$\text{Vậy: } r = OH = \frac{\frac{a}{2}h}{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}} = \frac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}} \approx 0,4263 \text{ (đvdd)}.$$

Chủ đề 11:
ỨNG DỤNG MTCT TÌM LỜI GIẢI SÁNG TẠO

Bài toán 1. Giải phương trình đại số

Phương pháp: Xét bài toán tổng quát:

Giải phương trình $f(x) = g(x)$ hay $h(x) = 0$.

Quy trình

- **Bước 1:** Tìm điều kiện phương trình xác định.
- **Bước 2:** Sử dụng MTCT đoán nghiệm phương trình bằng cách:
  - Ghi vào màn hình phương trình $f(x) - g(x)$ hay $h(x)$
  - Ấn phím [SHIFT] [CALC] máy hỏi **solve for X.** Lúc đó nhập một giá trị cụ thể nào đó của X sau đó ấn phím [=] (Việc nhập giá trị cụ thể này càng gần với giá trị nghiệm thì tốc độ xử lý cho ra nghiệm càng nhanh).

Đợi trong giây lát máy sẽ hiện kết quả nghiệm (đúng hoặc gần đúng). Sau khi tìm được các nghiệm, ta có thể định hướng lời giải cho bài toán.

- **Bước 3:** Giải phương trình (Dựa trên định hướng sau khi tìm được nghiệm).
- **Bước 4:** So sánh điều kiện và kết luận .

I. CÁC THÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Giải phương trình: $x = \sqrt{2-x}\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x}\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}\sqrt{2-x}$.

Định hướng: Sử dụng MTCT**dự đoán** được phương trình có nghiệm duy nhất theo quy trình bấm phím sau:

[ALPHA] [)] [ALPHA] [CALC] [√■] [2] [−] [ALPHA] [)] [▶] [√■] [3] [−] [ALPHA] [)] [▶] [+] [√■] [3] [−] [ALPHA] [)] [▶] [√■] [5] [−] [ALPHA] [)] [▶] [+] [√■] [5] [−] [ALPHA] [)] [▶] [√■] [2] [−] [ALPHA] [)] [SHIFT] [CALC]

Màn hình hiển thị **solve for X** {*Yêu cầu nhập giá trị x*}

Ấn [0] [=] đợi trong giây lát máy hiển thị

```
X=√2-X √3-X +√3-X▷
X=     1.991666667
L-R=             0
```

Ấn tiếp [SHIFT] [CALC] [1] [=] đợi trong giây lát máy hiển thị

```
X=√2-X √3-X +√3-X▷
X=     1.991666667
L-R=             0
```

Ấn tiếp [SHIFT] [CALC] [5] [=] đợi trong giây lát máy hiển thị

```
X=√2-X √3-X +√3-X▷
X=     1.991666667
L-R=             0
```

Bấm tiếp [SHIFT] [CALC] [-] [5] [=] đợi trong giây lát máy hiển thị

```
X=√2-X √3-X +√3-X▷
X=     1.991666667
L-R=             0
```

Từ đó dự đoán $X = 1,991666667$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Tiếp tục bấm phím [AC] [ALPHA] [)] [=] ta được

```
X
                239
                120
```

Suy ra $x = \dfrac{239}{120}$ là nghiệm của phương trình.

Từ đó ta giải bài toán trên như sau:

Lời giải

Điều kiện: $0 \le x \le 2$.

Ta có $f(x) = x$ là đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ đồng biến trên $\left[0;2\right]$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{2-x}\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x}\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}\sqrt{2-x}, x \in \left[0;2\right]$

Ta có

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{2-x}\sqrt{3-x} + \sqrt{3-x}\sqrt{5-x} + \sqrt{5-x}\sqrt{2-x} \\ &= \sqrt{(2-x)(3-x)} + \sqrt{(3-x)(5-x)} + \sqrt{(5-x)(2-x)} \\ &= \sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x^2 - 8x + 15} + \sqrt{x^2 - 7x + 10} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+15}} + \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+10}} < 0, \forall x \in (0;2)$$

$\Rightarrow g(x)$ là hàm nghịch biến trên $\left[0;2\right]$

Do đó, phương trình đã cho nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất

Ta tìm được $x = \dfrac{239}{120}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (Rõ ràng nghiệm này nếu không có sự trợ giúp của MTCT thì không dễ dàng tìm được).

Lời bình:

- Sử dụng chức năng TABLE ta có thể kiểm tra được hàm số g(x) nghịch biến trên $\left[0;2\right]$ như sau:

MODE 7 SHIFT MODE ▼ 5 1 {chọn bản một hàm số}

√■ 2 − ALPHA) ▶ √■ 3 − ALPHA) ▶ + √■ 3 − ALPHA) ▶ √■ 5 − ALPHA) ▶ + √■ 5 − ALPHA) ▶ √■ 2 − ALPHA) = .

Lúc đó màn hình hiển thị

```
Start?                    D        Math

                                      1
```

{Máy yêu cầu nhập giá trị khởi đầu}

Ta nhập 0 =. Màn hình hiển thị

```
End?                      D        Math

                                      5
```

{Máy yêu cầu nhập giá trị kết thúc}

Ta nhập 2 =. Màn hình hiển thị

```
Step?                     D        Math

                                      1
```

{Máy yêu cầu nhập giá trị "bước nhảy"}

Ta nhập 0 • 4 =

Màn hình hiển thị như sau

	X	F(X)
1	0	9,4847
2	0,4	8,2108
3	0,8	6,9095
4	1,2	5,5588
5	1,6	4,0962
6	2,0	1,732

Quan sát bảng trên ta thấy, khi giá trị X tăng trên $\left[0;2\right]$ thì giá trị tương ứng $F\left(X\right)$ giảm dần.

Ngoài cách giải trên ta còn có thể giải theo cách sau tuy nhiên cách giải này quá "cồng kềnh" và đòi hỏi nhiều kĩ thuật phức tạp.

Điều kiện: $0 \le x \le 2$.

Đặt $a=\sqrt{2-x}\ge 0;\ b=\sqrt{3-x}\ge 0;\ c=\sqrt{5-x}\ge 0$.

Lúc đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} ab+bc+ac+a^2=2\\ ab+bc+ac+b^2=3\\ ab+bc+ac+c^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)(a+c)=2\\ (a+b)(b+c)=3\\ (c+b)(a+c)=5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[(a+b)(b+c)(a+c)\right]^2=30\Rightarrow(a+b)(b+c)(a+c)=\sqrt{30}$$

Ta được hệ mới: $\begin{cases} a+b=\dfrac{\sqrt{30}}{5}\\ b+c=\dfrac{\sqrt{30}}{2}\\ a+c=\dfrac{\sqrt{30}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{30}}{60}\\ b=\dfrac{11\sqrt{30}}{60}\\ c=\dfrac{19\sqrt{30}}{60}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{239}{120}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$.

Lời giải và đáp số

Cách 1: Điều kiện: $2+x-x^2\Leftrightarrow -1\le x\le 2$ (*).

Đặt $t=x-x^2$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{3-t}-\sqrt{2+t}=1\Leftrightarrow\sqrt{3-t}=1+\sqrt{2+t}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le t\le 3\\ 3-t=1+2+t+2\sqrt{2+t}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le t\le 3\\ \sqrt{2+t}=-t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le t\le 0\\ t^2-t-2=0\end{cases}\Leftrightarrow t=-1$$

Với $t=-1\Leftrightarrow x-x^2=-1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ thỏa điều kiện (*)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{3-x+x^2},\ a\ge 0\\ b=\sqrt{2+x-x^2},\ b\ge 0\end{cases}$.

Phương trình đã cho chuyển thành hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2+b^2=5\\ a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b+1)^2+b^2=5\\ a=b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b^2+b-2=0\\ a=b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=1\\ a=2\end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases}\sqrt{3-x+x^2}=2\\ \sqrt{2+x-x^2}=1\end{cases}$. Đến đây tương đối dễ dàng.

Cách 3: (Có sự hỗ trợ MTCT)

Phân tích hướng giải: Dùng MTCT ta tìm được hai nghiệm gần đúng của phương trình là

$x_1 = -0,618033988$; $x_2 = 1,618033989$ bằng cách:

Nhập vào màn hình phương trình: $\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$ bằng cách ấn liên tục các phím sau:

[√■] [3] [−] [ALPHA] [)] [+] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [−] [√■] [2] [+] [ALPHA] [)] [−] [ALPHA] [)] [x²] [▶] [ALPHA] [CALC] [1]

Tiếp tục ấn phím: [SHIFT] [CALC]. Màn hình hiển thị và yêu cầu nhập giá trị của X.

```
D            Math
Solve for X

      2.791287847
```

Ta ấn [0] [=]. Máy cho kết quả nghiệm thứ nhất $x_1 = -0,618033988$:

```
D            Math
√3-X+X² -√2+X-X²▷
X=    -0.618033988
L-R=             0
```

Lưu nghiệm này vào biến nhớ A bằng cách: [SHIFT] [RCL] [(−)]

```
D            Math ▲
Ans→A

     -0.6180339887
```

Tương tự, ta tìm được nghiệm thứ hai $x_2 = 1,618033989$ bằng cách:

Nhập vào màn hình $\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$, sử dụng [SHIFT] [CALC] và giải với giá trị $x = 1$ thì ta được nghiệm thứ hai:

```
D            Math ▲
√3-X+X² -√2+X-X²▷
X=     1.618033989
L-R=             0
```

Lưu nghiệm này vào biến nhớ B bằng cách [SHIFT] [RCL] [°'"]

```
D            Math ▲
Ans→B

       1.618033989
```

Nhận thấy

AB -1	A+B 1

Tức $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = -1 \end{cases}$, vậy biểu thức $x^2 - x - 1$ sẽ là nhân tử chung của phương trình đã cho. Ta để ý rằng:

Khi thay các giá trị A, B vào biểu thức $\sqrt{3 - x + x^2}$ ta được 2 và $\sqrt{3 - x + x^2} - 2$ khi nhân lượng liên hiệp sẽ cho $x^2 - x - 1$

Khi thay giá trị A, B vào biểu thức $\sqrt{2 + x - x^2}$ ta được 1 và $1 - \sqrt{2 + x - x^2}$ khi nhân lượng liên hiệp sẽ cho $x^2 - x - 1$.

Do đó ta có thể giải vắn tắt bài toán trên như sau:

Lời giải và đáp số

Điều kiện: $2 + x - x^2 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$ (*)

Với điều kiện trên, phương trình đã cho được viết thành

$$\sqrt{3 - x + x^2} - 2 + 1 - \sqrt{2 + x - x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{3 - x + x^2} + 2} + \frac{x^2 - x - 1}{1 + \sqrt{2 + x - x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$ hai nghiệm này đều thỏa điều kiện (*)

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Cách 4: (Đưa về phương trình bậc 4)

Điều kiện: $2 + x - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$ (*)

Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{3 - x + x^2} = 1 + \sqrt{2 + x - x^2} \Leftrightarrow 3 - x + x^2 = 1 + 2 + x - x^2 + 2\sqrt{2 + x - x^2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x = \sqrt{2 + x - x^2} \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 1\right)\left(x^2 - x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \text{ (Vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$ thỏa (*)

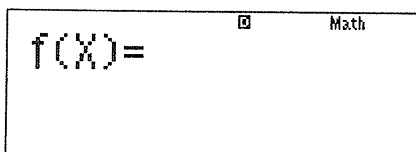
Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lời bình: Việc đưa phương trình bậc 4: $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ về phương trình tích $\left(x^2 - x - 1\right)\left(x^2 - x + 2\right) = 0$ không phải dễ dàng nếu ta không dùng công cụ máy tính.

Để phân tích thành nhân tử ta tiến hành làm như sau:

Chọn chức năng **TABLE** bằng cách: [MODE] [7]

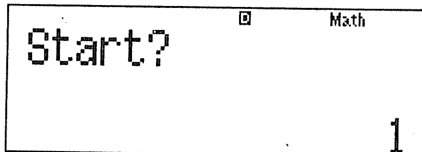
Màn hình hiển thị:



Yêu cầu nhập giá trị hàm số $f(x)$, ta nhập vào màn hình $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - X - 2$ bằng cách ấn các phím sau:

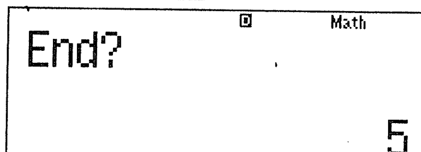
[ALPHA] [)] [$x^■$] [4] [▶] [−] [2] [ALPHA] [)] [$x^■$] [3] [▶] [+] [2] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [ALPHA] [)] [−] [2]

Ấn tiếp phím [=]. Màn hình hiển thị:



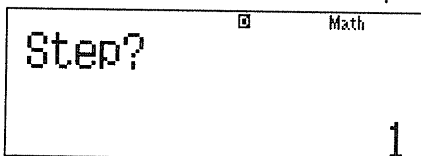
Yêu cầu nhập giá trị khởi đầu.

Ta ấn [−] [1] [=]. Màn hình hiển thị



Yêu cầu nhập giá trị kết thúc.

Ta ấn [2] [=]. Màn hình hiển thị



Máy yêu cầu nhập "bước nhảy".

Ta ấn [0] [•] [2] [=]

	X	F(X)
1	[illegible]	4
2	-0.8	1.5136
3	-0.6	-0.118
4	-0.4	-1.126
5	-0.2	-1.702
6	[illegible]	-2
7	0.2	-2.134
8	0.4	-2.182
9	[illegible]	-2.182
10	0.8	-2.134
11	1	-2
12	[illegible]	-1.702
13	1.4	-1.126
14	1.6	-0.118
15	[illegible]	1.5136

Quan sát màn hình ta thấy:

$f(-0,8).f(-0,6)<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-0,6;-0,8)$.

$f(1,6).f(1,8)<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1,6;1,8)$

Để tìm hai nghiệm này, ta tiến hành như sau:

Nhập vào màn hình $X^4-2X^3+2X^2-X-2$

Sử dụng chức năng SHIFT CALC (SOLVE)

ta tìm được nghiệm thứ nhất của phương trình là

$X^4-2X^3+2X^2-X-2$
X= -0.618033988
L-R= 0

Lưu nghiệm này biến nhớ A bằng cách SHIFT RCL (STO) (−) (A)

Ans→A
-0.6180339887

Tương tự ta tìm được nghiệm thứ hai của phương trình:

$X^4-2X^3+2X^2-X-2$
X= 1.618033989
L-R= 0

Lưu nghiệm này vào ô nhớ B bằng cách: SHIFT RCL (STO) °’’’ (B)

Ans→B
1.618033989

Nhận thấy:

AB	A+B
-1	1

nên A, B là nghiệm của phương trình: $x^2-x+1=0$.

Để xuất hiện nhân tử chung còn lại ta lấy $x^4-2x^3+2x^2-x-2$ chia x^2-x-1 ta được $x^4-2x^3+2x^2-x-2=(x^2-x-1)(x^2-x+2)$.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau: $x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = \sqrt[3]{-x^3 + 3x^2 + 5x - 15}$.

Giải

Cách 1: Phương trình đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{-x^3 + 3x^2 + 5x - 15} \Rightarrow y^3 = -x^3 + 3x^2 + 5x - 15$

Ta cũng có $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9 \Rightarrow 2y = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 18$

Từ đó: $y^3 + 2y = (x-3)^3 + 2(x-3)$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$, hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$pt(*) \Leftrightarrow y = x - 3 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = x - 3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1; x = 2; x = 3$.

Cách 2: Có hỗ trợ MTCT

Định hướng: Sử dụng chức năng [SHIFT] [CALC] (SOLVE) ta tìm được 3 nghiệm của phương trình là $x = 1; x = 2; x = 3$ như sau:

Ghi vào màn hình: $x^3 - 6x^2 + 12x - 9 - \sqrt[3]{-x^3 + 3x^2 + 5x - 15}$ bằng cách:

[ALPHA] [)] [$x^\blacksquare$] [3] [▶] [−] [6] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [1] [2] [ALPHA] [)] [−] [9] [−] [SHIFT] [$\sqrt{\blacksquare}$] [−] [ALPHA] [)] [SHIFT] [x^2] [+] [3] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [5] [ALPHA] [)] [−] [1] [5] [SHIFT] [CALC] [0] [=]

Ta được nghiệm thứ nhất $x = 1$

```
                    D        Math ▲
X³-6X²+12X-9-∛ ▷
X=                               1
L-R=                             0
```

Tiếp tục bấm [SHIFT] [CALC] [2] [=] ta được nghiệm thứ hai $x = 2$

```
                    D        Math ▲
X³-6X²+12X-9-∛ ▷
X=                               2
L-R=                             0
```

Tiếp tục bấm [SHIFT] [CALC] [3] [=] ta được nghiệm thứ ba $x = 3$

```
                    D        Math ▲
X³-6X²+12X-9-∛ ▷
X=                               3
L-R=                             0
```

Thử với nhiều giá trị khác ta vẫn được 3 được các nghiệm trên.

Do đó, ta dự đoán phương trình có ba nghiệm phân biệt $x=1, x=2, x=3$

Nếu đưa về phương trình tích thì phải có thừa số chung $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Nhận thấy rằng

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$;

$3-x+\sqrt[3]{-x^3+3x^2+5x-15}=-2\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{A}$

Với $A=(3-x)^2-(3-x)\sqrt[3]{-x^3+3x^2+5x-15}+\sqrt[3]{\left(-x^3+3x^2+5x-15\right)^2}>0$

Vậy ta có thể giải vắn tắt phương trình trên như sau:

Lời giải và đáp số

Phương trình đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

$$x^3-6x^2+12x-9=\sqrt[3]{-x^3+3x^2+5x-15}$$
$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=3-x+\sqrt[3]{-x^3+3x^2+5x-15}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)=-2.\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{A}, A>0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)\left[1+\frac{2}{A}\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1; x=2; x=3$

Nhận xét: MTBT là một công cụ hỗ trợ đắc lực giúp ta tiết kiệm thời gian và giải toán một cách nhẹ nhàng hơn. Sau khi sử dụng MTCT phát hiện được các nghiệm của phương trình, bài toán trở nên đơn giản và có được cách giải hay và sáng tạo hơn mà không cần phải đòi hỏi thành thạo nhiều kỹ thuật, kỹ năng và kiến thức phức tạp để giải.

Ví dụ 4. Giải phương trình sau: $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$.

Định hướng: Sử dụng chức năng [TABLE] để tìm các nghiệm của phương trình bằng cách ấn các phím sau:

[MODE] [7], màn hình hiển thị $f(X)=$ {tức yêu cầu nhập hàm số $f(x)$}.

Ta nhập vào màn hình $f(X)=4^{X^2-3X+2}+4^{X^2+6X+5}$ bằng cách

[4] [$x^■$] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [2] [▶] [+] [4] [$x^■$] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [6] [ALPHA] [)] [+] [5]

Ấn [=]

Màn hình hiển thị $g(X)=$ {tức yêu cầu nhập hàm số $g(x)$}.

Ta nhập $g(X)=4^{2X^2+3X+7}+1$ bằng cách

[4] [$x^■$] [2] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [3] [ALPHA] [)] [+] [7] [▶] [+] [1]

Màn hình hiển thị

Start? (Math)
1

nhập [−] [5] [=]

Màn hình hiển thị

End? (Math)
5

nhập [5] [=]

Màn hình hiển thị

Step? (Math)
1,

Ấn phím [=]

Ta được bảng kết quả sau

	X	F(X)	G(X)
1	−5	1.10^{25}	1.10^{25}
2	−4	1.10^{18}	1.10^{16}
3	−3	1.10^{12}	$4,2.10^{9}$
4	−2	$1,6.10^{7}$	262145
5	−1	4097	4097
6	0	1040	16385
7	1	$1,6.10^{7}$	$1,6.10^{7}$
8	2	4.10^{12}	4.10^{12}
9	3	1.10^{19}	2.10^{20}
10	4	1.10^{27}	5.10^{30}
11	5	1.10^{36}	2.10^{43}

Quan sát bảng trên ta dự đoán được nghiệm của phương trình là
$x = 1; x = 2; x = -1; x = -5$

Dựa vào số mũ của phương trình thì ta có thể phân tích phương trình đã cho
$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{array}\right.$$

Mặt khác, dựa vào cơ số 4 và mối liên hệ giữa số mũ $2x^2 + 3x + 7 = \left(x^2 - 3x + 2\right) + \left(x^2 + 6x + 5\right)$. Từ đó, ta có thể giải phương trình trên như sau:

Lời giải và đáp số

Đặt $\begin{cases} u = 4^{x^2-3x+2}, u > 0 \\ v = 4^{x^2+6x+5}, v > 0 \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$u + v = uv + 1 \Leftrightarrow (u-1)(v-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x^2 + 6x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, x = -2 \\ x = -1; x = -5 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1; x = 2; x = -1; x = -5$.

Ví dụ 5: Giải phương trình $\frac{1}{x-1}\log_2^2 x + \log_2 x + 2 = \frac{4}{x-1}$

Định hướng: Sử dụng chức năng [SHIFT] [CALC] ta tìm được nghiệm của phương trình bằng cách ấn các phím sau:

[1] [▭/▭] [ALPHA] [)] [−] [1] [▶] [(] [log■□] [2] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [)] [x²] [+] [log■□] [2] [▶] [ALPHA] [)] [▶] [+] [2] [ALPHA] [CALC] [▭/▭] [4] [▼] [ALPHA] [)] [−] [1]

Ấn [SHIFT] [CALC], nhập [0] [=] ta được kết quả là $X = 0,25$.

Ấn tiếp [SHIFT] [CALC], nhập [1] [=] ta được kết quả là $X = 0,25$.

Ấn tiếp [SHIFT] [CALC], nhập [2] [=] ta được kết quả là $X = 2$.

Ấn tiếp [SHIFT] [CALC], nhập [4] [=] ta được kết quả là $X = 2$.

Ấn tiếp [SHIFT] [CALC], nhập [−] [5] [=] ta được kết quả là $X = 0,25$.

Ấn tiếp [SHIFT] [CALC], nhập [−] [4] [=] ta được kết quả là $X = 0,25$.

Ấn tiếp [SHIFT] [CALC], nhập [−] [3] [=] ta được kết quả là $X = 0,25$.

Từ đó ta dự đoán phương trình có hai nghiệm là $x = 2, x = 0,25 = \frac{1}{4}$.

Do đó, nếu đặt $t = \log_2 x$, với $x > 0$ thì $t = 1$ hoặc $t = -2$

Lời giải

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Với điều kiện trên ta đặt $t = \log_2 x$, khi đó phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + (x-1)t + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t + x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 3 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 3 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ \log_2 x = 3 - x \ (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến.

Nên phương trình (*) có nhiều nhất một nghiệm.

Nhận thấy $x = 2$ là nghiệm của (*).

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2; x = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình: $16^x + \sqrt{2^{2x} + 5} = 5$.

Hướng dẫn giải

Ta có $16^x + \sqrt{2^{2x} + 5} = 5 \Leftrightarrow 4^{2x} + \sqrt{4^x + 5} = 5$.

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành

$t^2 + \sqrt{t+5} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{t+5} = 5 - t^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - t^2 \geq 0 \\ t + 5 = \left(5 - t^2\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq \sqrt{5} \\ t + 5 = 5^2 - 2t^2.5 + t^4 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $u = 5$, phương trình (1) trở thành $u^2 - \left(2t^2 + 1\right)u + t^4 - t = 0$ có $\Delta_u = \left(2t + 1\right)^2$. Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} u = t^2 - t \\ u = t^2 + t + 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 - t - 5 = 0 \ \text{(loại)} \\ t^2 + t - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{(loại)} \\ t = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 4^x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Lời bình: Ở (*) nếu không sử dụng phương pháp hằng số biến thiên như trên, ta có thể biến đổi thành phương trình bậc 4: $t^4 - 10t - t + 20 = 0$. Việc phân tích một phương trình bậc 4 thành tích hai tam thức bậc hai không phải đơn giản. Tuy nhiên, với sự hỗ trợ của MTCT **(VN 570 ES PLUS)** thì ta có thể dễ dàng phân tích được.

Cụ thể: Xét hàm số $f\left(t\right) = t^4 - 10t^2 - t + 20$

Vào chức năng **TABLE** bằng cách ấn phím MODE 7.

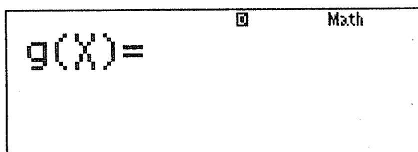
Màn hình hiển thị:

Math
f(X)=

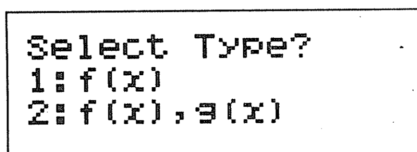
Ta nhập hàm số $X^4 - 10X^2 - X + 20$ bằng quy trình bấm phím sau:

ALPHA) $x^{■}$ 4 ▶ − 1 0 ALPHA) x^2 − ALPHA) + 2 0 =.

Màn hình xuất hiện:



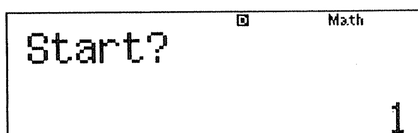
Để tắt chế độ hiển thị hàm số thứ hai này, ta tiếp tục ấn các phím sau:
SHIFT MODE ▼ 5
Màn hình hiển thị:



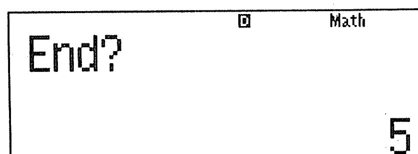
Ấn phím 1 để chọn chế độ 1 hàm số $f(x)$.

Tiếp tục ấn: =. Máy yêu cầu nhập giá trị khởi đầu.

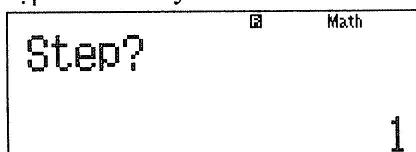
Ta có thể nhập giá trị khởi đầu là − 5



Ấn tiếp phím =. Máy yêu cầu nhập giá trị kết thúc.



Ta có thể nhập 5 =.
Tiếp đến máy yêu cầu nhập "bước nhảy".



Ta có thể ấn 1 =

Ta có bảng quan sát bên:

$f(-3).f(-2)=12.(-2)<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-3;-2)$

$f(-2).f(-1)=-2.12<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-2;-1)$

$f(1).f(2)=10.(-6)<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(1;2)$

$f(2).f(3)=-6.8<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(2;3)$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên bốn khoảng rời đã cho. Để tìm được 4 nghiệm đó ta sử dụng chức năng: SHIFT CALC (SOLVE)

- **Bước 1:** Tìm nghiệm trên khoảng $(-3;-2)$ như sau:

  Nhập vào màn hình: x^4-10x^2-x+10

  X⁴-10X²-X+20

  Tiếp đến ấn SHIFT CALC (SOLVE) máy yêu cầu giải phương trình với giá trị X cần nhập

  Solve for X
  5

  ta nhập $-2,5\in(-2;-3)$ {vì nghiệm thuộc $(-3;-2)$} ta được nghiệm $x\approx-2,561552813$, lưu nghiệm này vào biến nhớ A bằng cách: SHIFT RCL (STO) (−) (A)

  Ans→A
  -2.561552813

- **Bước 2:** Tương tự ta tìm được nghiệm thứ hai của phương trình trên khoảng $(-2;-1)$ và lưu vào biến nhớ B

```
Ans→B
               -1.791287847
```

- **Bước 3:** Tương tự ta tìm nghiệm thứ ba trên khoảng $(1;2)$ và lưu vào biến nhớ C.

```
Ans→C
                1.561552813
```

- **Bước 4:** Tương tự ta tìm nghiệm thứ tư trên khoảng $(2;3)$ và lưu vào biến nhớ D

```
Ans→D
                2.791287847
```

Nhận thấy:

```
AC                 A+C
           -4                 -1

BD                 B+D
           -5                  1
```

Từ đó ta dễ dàng phân tích:

$$t^4-10t^2-t+20=\left(t^2+t-4\right)\left(t^2-t-5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2+t-4=0\\t^2-t-5=0\end{array}\right.$$

Bài toán 2: Giải phương trình lượng giác

Phương trình lượng giác (PTLG) là một phần rất quan trọng trong chương trình toán THPT, đặc biệt nó thường xuất hiện trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng. Phần lớn học sinh thường lúng túng trước những PTLG không mẫu mực và không định hướng được lời giải của bài toán. Đoán được nghiệm PTLG, giúp ta *lật ngược vấn đề* để đi đến lời giải ngắn ngọn và sáng tạo hơn.

Máy tính bỏ túi (MTBT) là một công cụ hỗ trợ đắc lực giúp đoán được các nghiệm và từ đó tìm ra định hướng cho lời giải bài toán.

Quy trình tìm nghiệm

- *Bước 1*: Tiến hành phép thử để tìm một nghiệm đặc biệt. Ta thử các giá trị đặc biệt như sau: $0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2};\pi;\frac{2\pi}{3};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}$. {để máy ở chế độ Rad bằng cách ấn: [SHIFT] [MODE] [4])

- *Bước 2*: Giả sử ở bước 1 đã tìm được nghiệm $x=\frac{\pi}{6}$. Ta tiếp tục thử với các giá trị đặc biệt tương ứng với cùng liên kết nghiệm đó. Cụ thể

  - Thử với giá trị đối của nó: $x=-\frac{\pi}{6}$, nếu thỏa mãn phương trình thì ta dự đoán phương trình có nghiệm x sao cho $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, hay phương trình được đưa về dạng tích với một thừa số $\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)$;

  - Thử với giá trị bù của nó: $x=\frac{5\pi}{6}$, nếu thỏa mãn phương trình thì ta dự đoán phương trình có nghiệm x sao cho $\sin x=\frac{1}{2}$, hay phương trình được đưa về dạng tích với một thừa số $\left(2\sin x-1\right)$;

  - Thử với giá trị hơn (kém) π của nó: $x=\frac{7\pi}{6}\left(\text{hay } x=-\frac{5\pi}{6}\right)$, nếu thỏa mãn phương trình thì ta dự đoán phương trình có nghiệm x sao cho $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, hay phương trình được đưa về dạng tích với một thừa số $\left(\sqrt{3}\tan x-1\right)$.

Sử dụng MTCT để tiến hành nhẩm nghiệm một trong hai cách sau:

Cách 1: Dùng chức năng [CALC], chức năng này có công dụng tính giá trị của một hàm số tại một điểm.

- *Bước 1*: Chuyển phương trình về dạng $f(x)=0$. Giả sử cần thử với giá trị $x=\frac{\pi}{6}$ ta thực hiện theo bước 2;
- *Bước 2*: Nhập vào máy hàm số $f(x)$, bấm phím CALC, máy hỏi X? ta nhập vào $\frac{\pi}{6}$ và bấm phím =;
- *Bước 3*: Để thử các giá trị khác ta tiếp tục bấm phím CALC, nhập giá trị và bấm phím =.

Cách 2: Dùng chức năng SHIFT CALC , chức năng này có công dụng là tìm nghiệm của phương trình trong một lân cận của x đã chỉ ra. Ta thực hiện theo các bước sau đây:

- *Bước 1*: Chuyển chương trình máy tính về đơn vị độ bằng cách SHIFT MODE 3
- *Bước 2*: Nhập hàm số $f(x)$;
- *Bước 3*: Ấn phím SHIFT CALC máy hỏi X? ta nhập vào giá trị mà ta dự đoán là nghiệm, chẳng hạn 60 (60^0), máy sẽ dò tìm một nghiệm trong lân cận của 60. Tiếp tục nhấn SHIFT CALC để kiểm tra các giá trị khác.

Cách này có một nhược điểm là đôi lúc ta chọn các giá trị x_i ban đầu máy báo **CAN'T SOLVE** hoặc tốc độ cho ra nghiệm tương đối lâu.

Cách 3: Sử dụng chức năng TABLE, chức năng này có công dụng là tìm nghiệm của phương trình (phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số) trên một khoảng $\left[a;b\right]$ nào đó.

- *Bước 1:* Cài đặt máy ở chế độ TABLE bằng cách ấn phím MODE 7
- *Bước 2:* Nhập hàm số $f(x), g(x)$
- *Bước 3:* Quan sát những điểm x_i mà giá trị hàm số tương ứng của chúng bằng nhau tức là $f(x_i)=g(x_i)$.

Ví dụ 1. Giải phương trình sau: $2\sin 2x-2\cos x=7\sin x+\cos 2x-4$.

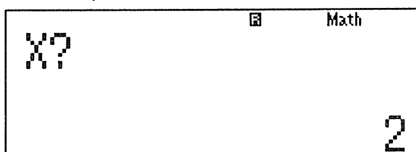
Định hướng: Sử dụng MTCT ta tìm được 1 nghiệm $x=\frac{\pi}{6}$ theo quy trình bấm phím sau (sử dụng cách 1)

Chuyển máy về chế độ radian bằng cách: SHIFT MODE 4

Ghi vào màn hình:

2 sin 2 ALPHA)) − 2 cos ALPHA)) − 7 sin ALPHA)) − cos 2 ALPHA)) + 4

Ấn [CALC] , Màn hình hiển thị:



Nhập [0] [=], ta được kết quả 1 { 0 không là nghiệm của phương trình}.

Nhấn [CALC], sau đó nhập [SHIFT] [x10^x] [⊟] [6], máy cho kết quả bằng 0 { $\frac{\pi}{6}$ là nghiệm của phương trình}

Thử [÷R] [SHIFT] [x10^x] [⊟] [6], máy cho kết quả là $7-2\sqrt{3}$ { $-\frac{\pi}{6}$ không là nghiệm của phương trình},

Tiếp tục thử [5] [SHIFT] [x10^x] [⊟] [6], máy cho kết quả bằng 0 {tức $\frac{5\pi}{6}$ cũng đúng là nghiệm của phương trình}.

Do đó ta dự đoán phương trình có nghiệm $\sin x = \frac{1}{2}$ nên nếu biến đổi phương trình về dạng tích thì sẽ có thừa số $2\sin x - 1$. Từ đó, ta có thể giải bài toán trên như sau:

Cách 1: Đặt $t = \sin x, |t| \le 1$. Lúc đó phương trình đã cho được viết thành

$$4t\cos x - \left(1-2t^2\right) - 7t - 2\cos x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + \left(4\cos x - 7\right)t + 3 - 2\cos x = 0$$

Theo định lý Viet thì $t_1 + t_2 = \frac{7-4\cos x}{2} \Rightarrow t_2 = 3 - 2\cos x\left(\text{với } t_1 = \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos x + \sin x = 3\left(\text{vô nghiệm}\right)$.

Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Cách 2: Theo phân tích trên thì ta thấy phương trình phải xuất hiện nhân tử chung là $\left(2\sin x - 1\right)$. Vậy ta phải làm như thế nào để xuất hiện? Ta để ý rằng:

$\oplus\, 2\sin 2x - 2\cos x = 2\cos x\left(2\sin x - 1\right)$

$\oplus - \cos 2x - 7\sin x + 4 = 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = \left(2\sin x - 1\right)\left(\sin x - 3\right)$

Từ đó ta có giải tóm tắt bài toán trên như sau:

Phương trình đã cho được viết lại

$2\cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x-3)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(2\cos x+\sin x-3)=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 3x+\cos 2x-7\cos x+2(\sin 2x+\sin x-2)=0$.

Định hướng: Sử dụng MTCT ta tìm được $x=\dfrac{2\pi}{3}$ là 1 nghiệm của phương trình theo cách ấn phím sau:

Chuyển máy về chế độ Rad bằng cách: [SHIFT] [MODE] [4]

Ghi vào màn hình:

[cos] [3] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [7] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [2] [(] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)] [+] [sin] [ALPHA] [)] [)] [−] [2] [)]

Ấn [CALC], màn hình xuất hiện | X? | {yêu cầu nhập giá trị X }

Nhập [0] [=] , máy cho kết quả -9 { 0 không là nghiệm của phương trình},

Ấn [CALC], Nhập [SHIFT] [x10^x] [▭/▭] [3], máy cho kết quả $-9+2\sqrt{3}$ { $\dfrac{\pi}{3}$ không là nghiệm của phương trình},

Ấn [CALC], Nhập [SHIFT] [x10^x] [÷] [6] [=], máy cho kết quả $-\dfrac{5+5\sqrt{3}}{2}$ { $\dfrac{\pi}{6}$ không là nghiệm của phương trình}

Ấn [CALC], Nhập [SHIFT] [x10^x] [▭/▭] [2] [=], máy cho kết quả -3 { $\dfrac{\pi}{2}$ không là nghiệm của phương trình},

Ấn [CALC], Nhập [2] [SHIFT] [x10^x] [÷] [3], máy cho kết quả 0 { $\dfrac{2\pi}{3}$ là 1 nghiệm của phương trình},

Thử với giá trị đối của nó $\left\{x=-\dfrac{2\pi}{3}\right\}$: [CALC] [−] [2] [SHIFT] [x10^x] [▭/▭] [3] [=]

ta được kết quả là 0 nên $x=-\dfrac{2\pi}{3}$ cũng đúng là nghiệm của phương trình.

Do đó ta dự đoán phương trình có nghiệm $\cos x = -\frac{1}{2}$ nên nếu biến đổi phương trình về dạng tích thì sẽ có thừa số $2\cos x + 1$. Từ đó, ta có thể giải bài toán trên như sau:

Cách 1: Phương trình đã cho được viết thành

$$4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 10\cos x + 4\sin x\cos x + 2\sin x - 5 = 0$$

Đặt $t = \cos x, |t| \le 1$. Lúc đó:

$$pt \Leftrightarrow 4t^3 + 2t^2 + (4\sin x - 10)t + 2\sin x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)\left(4t^2 + 4\sin x - 10\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ 4t^2 + 4\sin x - 10 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ -2\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Cách 2: Theo cách dự đoán trên ta phải phân tích phương trình sao cho xuất hiện $2\cos x + 1$. Ta để ý rằng:

$\oplus\, 2\sin 2x + 2\sin x = 2\sin x(2\cos x + 1)$

$\oplus\, \cos 3x + \cos 2x - 7\cos x - 4 = 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 10\cos x - 5$
$= (2\cos x + 1)(2\cos^2 x - 5)$

Vậy ta có thể tóm tắt lời giải như sau:

$$pt \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(2\cos^2 x + 2\sin x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(-2\sin^2 x + 2\sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin 2x + \sin x = \cos 2012x + \cos 2013x + \cos 2014x$.

Định hướng: Sử dụng MTCT ta tìm được 1 nghiệm $x = \frac{2\pi}{3}$ của phương trình như sau:

Chuyển máy về chế độ Rad bằng cách: [SHIFT] [MODE] [4]

Ghi vào màn hình:

Ấn [CALC], màn hình xuất hiện [X?] {yêu cầu nhập giá trị X }

Nhập [0] [=] , máy cho kết quả -3 { 0 không là nghiệm của phương trình},

Ấn [CALC], Nhập [SHIFT] [x10ˣ] [▭/▭] [3], máy cho kết quả 3,732050808 { $\frac{\pi}{3}$ không là nghiệm của phương trình},

Ấn [CALC], Nhập [SHIFT] [x10ˣ] [÷] [6], máy cho kết quả 1,366025404 { $\frac{\pi}{6}$ không là nghiệm của phương trình},

Ấn [CALC], Nhập [SHIFT] [x10ˣ] [÷] [2], máy cho kết quả 1 { $\frac{\pi}{2}$ không là nghiệm của phương trình},

Ấn [CALC], Nhập [2] [SHIFT] [x10ˣ] [÷] [3], máy cho kết quả 0 { $\frac{2\pi}{3}$ là 1 nghiệm của phương trình},

Thử với giá trị đối của nó $\left\{x=-\frac{2\pi}{3}\right\}$: [CALC] [−] [2] [SHIFT] [x10ˣ] [÷] [3] [=]

ta được kết quả là ≈ 0 nên $x=-\frac{2\pi}{3}$ cũng đúng là nghiệm của phương trình.

Do đó ta dự đoán phương trình có nghiệm $\cos x=-\frac{1}{2}$ nên nếu biến đổi phương trình về dạng tích thì sẽ có thừa số $2\cos x+1$. Rõ ràng bài này không thể quy về phương ẩn $t=\cos x$. Từ đó, ta có thể giải bài toán trên như sau:

$$\begin{aligned} pt &\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\sin x=2\cos 2x.\cos 2013x+\cos 2013x \\ &\Leftrightarrow \sin x(2\cos x+1)=2\cos 2013x(2\cos x+1) \\ &\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\sin x-\cos 2013x)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{4028}+\frac{k\pi}{1007};x=\frac{\pi}{4024}+\frac{k\pi}{1006} \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $4\sin x+\cos x+3\sin x\tan x-5\tan x=5$.

Định hướng: Sử dụng chức năng**TABLE** ta tìm được 1 nghiệm $x=\frac{3\pi}{4}$ như sau:

Chuyển máy về chế độ: [SHIFT] [MODE] [3]

Vào chức năng **TABLE** bằng cách ấn phím: [MODE] [7],

Ấn tiếp [SHIFT] [MODE] [▼] [5] [1] {chọn bảng một hàm số}

Màn hình xuất hiện [f(X)=] {yêu cầu nhập hàm số f(x) }

Nhập vào màn hình:

[4] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [3] [sin] [ALPHA] [)] [)] [tan] [ALPHA] [)] [)] [−] [5] [tan] [ALPHA] [)] [)] [−] [5]

Ấn [=], Màn hình hiển thị:

```
R          Math
Start?
                 1
```

{yêu cầu nhập giá trị khởi đầu}, ta nhập [0] [=]

Màn hình hiển thị:

```
R          Math
End?
                 5
```

{yêu cầu nhập giá trị cuối}, ta nhập [1] [8] [0] [=]

Màn hình hiển thị:

```
D          Math
Step?
                 1
```

{yêu cầu nhập bước nhảy}, ta nhập [1] [5] [=]

Ta được bảng sau:

	X	F(X)
1	0	–4
2	15	–4,13
3	30	–4,154
4	45	–4,343
5	60	–5,196
6	75	–8,723
7	90	ERROR
8	105	6,4504
9	120	2,1243
10	135	0
11	150	–1,845
12	165	–3,798
13	180	–6

Quan sát bản trên ta thấy $x = 135$ {tức $x = 135^0 = \frac{3\pi}{4}$} là 1 nghiệm của phương trình.

Thoát chế độ **TABLE** bằng cách [MODE] [1] , vào chế độ rad bằng cách ấn phím:

[SHIFT] [MODE] [4] tiếp đến kiểm tra các giá trị liên kết với $x=\frac{3\pi}{4}$

Nhập vào màn hình hàm số:

[4] [sin] [ALPHA] [)] [)] [+] [cos] [ALPHA] [)] [)] [+] [3] [sin] [ALPHA] [)] [)] [tan] [ALPHA] [)] [)] [−] [5] [tan] [ALPHA] [)] [)] [−] [5]

Ấn [CALC] màn hình xuất hiện | X? | {yêu cầu nhập giá trị x }

Nhập [−] [3] [SHIFT] [x10^x] [÷] [4] [=], ta được kết quả $-10-4\sqrt{2}$ { $-\frac{3\pi}{4}$ không là nghiệm của phương trình}

Ấn [CALC], Nhập [SHIFT] [x10^x] [−] [3] [SHIFT] [x10^x] [÷] [4], ta được kết quả $-10+4\sqrt{2}$ { $\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ không là nghiệm của phương trình}.

Ấn [CALC], Nhập [SHIFT] [x10^x] [+] [3] [SHIFT] [x10^x] [÷] [4], ta được kết quả 0 nên cũng đúng là nghiệm của phương trình. Do đó ta dự đoán phương trình có nghiệm $\tan x=-1$ nên nếu biến đổi phương trình về dạng tích thì sẽ có thừa số $\tan x+1$. Từ đó, ta có thể giải bài toán trên như sau:

Lời giải

Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

Với điều kiện trên, phương trình được viết thành

$$(\sin x+\cos x)+(3\sin x+3\sin x.\tan x)=5(\tan x+1)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\tan x+1)+3\sin x(\tan x+1)-5(\tan x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (\tan x+1)(\cos x+3\sin x-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \cos x+3\sin x=5(\text{vô nghiệm})\end{array}\right.\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (\text{thỏa}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Thí dụ 5. Giải phương trình $1+3\tan x=2\sin 2x$.

Định hướng: Sử dụng chức năng**TABLE** tìm nghiệm của phương trình như sau:

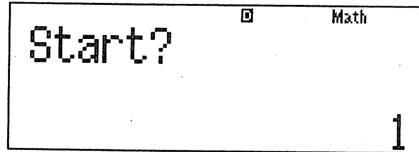
[MODE] [7], màn hình hiển thị | $f(X)=$ | {yêu cầu nhập hàm số $f(x)$ }

Ta nhập: [1] [+] [3] [tan] [ALPHA] [)] [)] [=]

Màn hình hiển thị | $g(X)=$ | {yêu cầu nhập hàm số $g(x)$ }

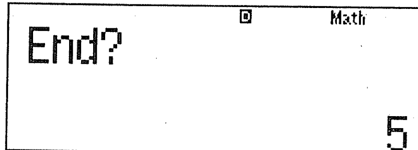
Ta nhập [1] [+] [3] [tan] [ALPHA] [)] [)] [=]

Màn hình xuất hiện:



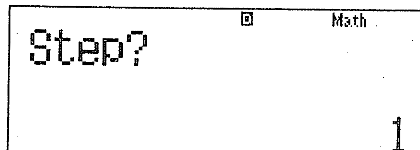
{yêu cầu nhập giá trị X khởi đầu}, ta nhập [0] [=]

Màn hình xuất hiện:



{yêu cầu nhập giá trị X kết thúc }, ta nhập [1] [8] [0] [=]

Màn hình xuất hiện:



{yêu cầu nhập giá trị bước nhảy }, ta nhập [1] [5] [=]

Ta được bảng sau

	X	F(X)	G(X)
1	0	1	0
2	15	1,8038	1
3	30	2,732	1,732
4	45	4	2
5	60	6,1961	1,732
6	75	12,196	1
7	90	ERROR	0
8	105	−10,19	−1
9	120	−4,196	−1,732
10	135	−2	−2
11	150	−0,732	−1,732
12	165	−0,1961	−1
13	180	1	0

Quan sát bảng trên ta nhận thấy $x = 135^0$ $(x = \frac{3\pi}{4})$ là một nghiệm của phương trình.

Thoát chế độ **TABLE** bằng cách [MODE] [1], chuyển sang chế độ rad bằng cách [SHIFT] [MODE] [4], tiếp đến kiểm tra các giá trị liên kết với $x = \frac{3\pi}{4}$

Nhập vào màn hình hàm số:

[1] [+] [3] [tan] [ALPHA] [)] [)] [−] [2] [sin] [2] [ALPHA] [)] [)]

Ấn [CALC] màn hình xuất hiện [X?] {yêu cầu nhập giá trị x }

Nhập [−] [3] [SHIFT] [x10^x] [÷] [4] [=], ta được kết quả 2 { $-\frac{3\pi}{4}$ không là nghiệm của phương trình}

Ấn [CALC] màn hình xuất hiện [X?] {yêu cầu nhập giá trị x }

Nhập [SHIFT] [π] [-] 3 [SHIFT] [π] [÷] 4 [=], ta được kết quả 2 { $\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ không là nghiệm của phương trình}.

Ấn [CALC] màn hình xuất hiện [X?] {yêu cầu nhập giá trị x }

Nhập [SHIFT] [x10^x] [+] [3] [SHIFT] [x10^x] [÷] [4], ta được kết quả 0 nên cũng đúng là nghiệm của phương trình. Do đó ta dự đoán phương trình có nghiệm $\tan x=-1$ nên nếu biến đổi phương trình về dạng tích thì sẽ có thừa số $\tan x+1$. Từ đó, ta có thể giải bài toán trên như sau:

Từ đó, ta có thể giải bài toán trên như sau:

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $\cos x\neq 0$. Đặt $t=\tan x\Rightarrow \sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$. Phương trình đã cho trở thành $1+3t=\frac{4t}{1+t^2}\Leftrightarrow (t+1)(3t^2-2t+1)=0\Leftrightarrow t=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ (thỏa)

Ngoài cách đặt $t=\tan x$ ta có thể biến đổi phương trình ban đầu như sau

Cách 2: Chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x\neq 0$ ta được

$$1+\tan^2 x+3\tan x(1+\tan^2 x)=4\tan x$$
$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x+1=0$$
$$\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Vậy, $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 6. Giải phương trình:

$$\cos x(\cos 2x-19)-(1+\sin x)(7-\cos 2x)=-3(8+\sin 2x).$$

Định hướng: Sử dụng chức năng [CALC] mò nghiệm của phương trình {Máy ở chế độ rad}

Nhập vào màn hình hàm số:

$\cos x(\cos 2x-19)-(1+\sin x)(7-\cos 2x)+3(8+\sin 2x)$ bằng cách:

SHIFT x10^x + 3 SHIFT x10^x ÷ 4 CALC AC SHIFT MODE 4 cos ALPHA)) (cos 2 ALPHA)) − 1 9) − (1 + sin ALPHA))) (7 − cos 2 ALPHA))) + 3 (8 + sin 2 ALPHA)))

Ấn CALC, màn hình xuất hiện [X?], {yêu cầu nhập giá trị X }

Ta nhập 0 =, máy hiển thị kết quả 0 {0 là một nghiệm của phương trình}.

Ấn CALC để thử các giá trị khác

Thử với SHIFT x10^x =, máy hiển thị kết quả 36 { π không là nghiệm của phương trình }.

Ấn CALC để thử các giá trị khác

Thử với SHIFT x10^x ÷ 2 =, máy hiển thị kết quả 8 { $\frac{\pi}{2}$ không là nghiệm của phương trình }.

Ấn CALC để thử các giá trị khác

Thử với 2 SHIFT x10^x =, máy hiển thị kết quả 0 { 2π là một nghiệm khác của phương trình }.

Do đó ta dự đoán $x = k2\pi$ là nghiệm của phương trình hay $\cos x = 1$.

Từ đó ta giải bài toán trên như sau:

Lời giải

$$\text{pt} \Leftrightarrow \cos x\left(2\cos^2 x - 20\right) + \left(1+\sin x\right)\left(2\cos^2 x - 8\right) + 24 + 6\sin x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 x - 20\cos x + 2\cos^2 x - 8 + 2\sin x\cos^2 x - 8\sin x + 24 + 6\sin x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + \left(\sin x + 1\right)\cos^2 x - \left(10 - 3\sin x\right)\cos x - 4\sin x + 8 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$ phương trình (*) trở thành

$$t^3 + \left(\sin x + 1\right)t^2 - \left(10 - 3\sin x\right)t - 4\sin x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left[t^2 + \left(\sin x + 2\right)t + 4\sin x - 8\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 + \left(\sin x + 2\right)t + 4\sin x - 8 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Giải (2): ta có $\Delta = \left(\sin x + 2\right)^2 - 4\left(4\sin x - 8\right) = \left(\sin x - 6\right)^2$.

Lúc đó , phương trình (2) có hai nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l} t = -4 \\ t = -\sin x + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -4 \\ \cos x + \sin x = 2 \end{array}\right. \text{(Vô nghiệm)}$$

Vậy, $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

Bài toán 3. Ứng dụng giải bất phương trình

Phương pháp

Tính chất: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên miền K. Nếu phương trình $f(x)$ bằng 0 vô nghiệm trên miền K thì $f(x)$ không đổi dấu trên K.

Dựa trên tính chất trên ta suy ra phương pháp giải bất phương trình dạng $f(x)>0$ ($f(x)<0, f(x)\geq 0, f(x)\geq 0$) như sau:

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)$;
- Bước 2: Giải phương trình $f(x)=0$.
- Bươc 3: Lập bảng xét dấu của $f(x)$ (Để xác định dấu của $f(x)$ trên các khoảng con K của D mà $f(x)$ vô nghiệm, ta chỉ xác định dấu của $f(x_0)$ với x_0 là một phần tử bất kỳ của K)

Chú ý: Để tính giá trị của hàm số tại một điểm ta sử dụng chức năng CALC.

Ví dụ. Cho hàm số $y=x^5-\sqrt{2x^2+1}$ tại các điểm có hoành độ $x=2, x=5$.

Nhập hàm số $y=x^5-\sqrt{2x^2+1}$ bằng cách:

ALPHA S⇔D ALPHA CALC ALPHA) $x^■$ 5 ▶ − √■ 2 ALPHA) x^2 + 1

Ấn CALC, màn hình xuất hiện X? {yêu cầu nhập giá trị X}

Nhập 2 =, ta được kết quả là 29.

Ấn CALC Nhập 5 =, ta được kết quả là 3117,858572.

Nói chung khi đã nhập biểu thức y xong thì ta có thể tính giá trị của y tại các điểm $x_1, x_2, \ldots$ Ở đây vấn đề mà ta quan tâm là dấu của y tại các điểm $x_1, x_2, \ldots$ (các giá trị của y tại các điểm này có thể là các giá trị gần đúng. Điều này không ảnh hưởng gì kết quả nghiệm của bất phương trình).

Ví dụ 1. Giải bất phương trình: $x+\sqrt{x^2+16}\leq\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ (1).

Lời giải

Cách 1: (Phương pháp cơ bản)

bpt(1) $\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+16}+x^2+16\leq 40 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+16}\leq 24-x^2$ (2).

Ta xét các trường hợp sau:

⊕TH1: Nếu $x=0$ thì bpt (2) luôn thỏa mãn.

⊕TH2: Nếu $x<0$

bpt (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+16}\geq\dfrac{24-x^2}{x}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{24-x^2}{x} \le 0 \\ \begin{cases} x^2+16 \ge \left(\dfrac{24-x^2}{x}\right)^2 \\ \dfrac{24-x^2}{x} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{6} \le x < 0 \\ x \ge 2\sqrt{6} \end{array}\right. \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2\sqrt{6} \\ 0 < x < 2\sqrt{6} \end{array}\right. \\ x^2\left(x^2+16\right) \ge \left(24-x^2\right)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{6} \le x < 0 \\ x \ge 2\sqrt{6} \end{array}\right. \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2\sqrt{6} \\ 0 < x < 2\sqrt{6} \end{array}\right. \\ 64x^2 \ge 24^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{6} \le x < 0 \\ x \ge 2\sqrt{6} \end{array}\right. \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2\sqrt{6} \\ 0 < x < 2\sqrt{6} \end{array}\right. \\ |x| \ge 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \ge 3 \end{array}\right..$$

Kết hợp với $x < 0$ ta được $x < 0$.

$\oplus$TH3: $x > 0$

$$\text{bpt}(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+16} \le \frac{24-x^2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{24-x^2}{x} \ge 0 \\ x^2+16 \le \left(\dfrac{24-x^2}{x}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -2\sqrt{6} \\ 0 < x \le 2\sqrt{6} \end{array}\right. \\ 64x^2 \le 24^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -2\sqrt{6} \\ 0 < x \le 2\sqrt{6} \end{array}\right. \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le 3.$$

Kết hợp cả 3 trường hợp ta được tập nghiệm của bất phương trình là

$$T = \left(-\infty; 3\right].$$

Cách 2: Kết hợp sử dụng máy tính

Tập xác đinh $D = \mathbb{R}$.

Xét $f(x) = x + \sqrt{x^2+16} - \dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+16} = 24 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2\left(x^2+16\right) = \left(24-x^2\right)^2 \Leftrightarrow 64x^2 = 576 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Thử lại chỉ có $x = 3$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Ta có: $f(0) = -6 < 0$; $f(4) = 2,58 > 0$ (Dùng máy tính)

Hàm f(x) liên tục và vô nghiệm trên $(-\infty;3)$; $(3;+\infty)$ nên trên từng khoảng này f(x) không đổi dấu.

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình là $T=(-\infty;3]$.

Chú thích: Để tính giá trị hàm số $f(x)=x+\sqrt{x^2+16}-\dfrac{40}{\sqrt{x^2+16}}$ tại các điểm $x=0, x=4$ ta làm như sau:

Nhập vào hàm số bằng cách:

[ALPHA] [)] [+] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [6] [▶] [−] [▭/▭] [4] [0] [▼] [√■] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [6]

Ấn [CALC], màn hình xuất hiện | X? |

Nhập [0] [=] , ta được kết quả là -6.

Ấn [CALC], nhập [4] [=] ta được kết quả $\approx 2{,}58$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình: $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\ge x$ (2).

Lời giải

Cách 1. Điều kiện: $-1\le x\le 1$

$$\text{bpt}(2)\Leftrightarrow \sqrt{1+x}\ge x+\sqrt{1-x}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\sqrt{1-x}\ge 0\\ 1+x\ge\left(x+\sqrt{1-x}\right)^2\end{cases}\ (I)\\ \begin{cases}1+x\ge 0\\ x+\sqrt{1-x}\le 0\end{cases}\ (II)\end{array}\right.$$

Ta xét hệ $\begin{cases}x+\sqrt{1-x}\ge 0\\ 1+x\ge\left(x+\sqrt{1-x}\right)^2\end{cases}$ (I)

Ta có:

$$x+\sqrt{1-x}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\ge -x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x\le 0\\ 1-x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}-x\ge 0\\ 1-x\ge x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ \begin{cases}-1\le x\le 0\\ x^2+x-1\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ \begin{cases}-1\le x\le 0\\ \dfrac{-1-\sqrt5}{2}\le x\le\dfrac{-1+\sqrt5}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\le x\le 1$$

Do đó: $(I)\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 1+x\ge x^2+1-x+2x\sqrt{1-x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 1\\ 2x\sqrt{1-x}\le 2x-x^2\ (2)\end{cases}$

⊳Nếu $x = 0$ thì (2) đúng

⊳Nếu $x < 0$ thì (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x} \ge 2 - x \Leftrightarrow 4(1-x) \ge (2-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 \le 0$ vô nghiệm trên $[-1;0)$.

⊳Nếu $x > 0$ thì (2) $\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x} \le 2 - x \Leftrightarrow 4(1-x) \le (2-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 \ge 0$ đúng trên $(0;1]$.

Vậy hệ (I) có nghiệm $0 \le x \le 1$

Ta xét hệ Xét hệ (II):

$$\begin{cases} 1+x \ge 0 \\ x+\sqrt{1-x} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \sqrt{1-x} \le -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -x \ge 0 \\ 1-x \le x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x \ge \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình là $T=[0;1]$.

Cách 2. Kết hợp máy tính

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x,\ x \in [-1;1]$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x + \sqrt{1-x} \Rightarrow 1 + x = \left(x + \sqrt{1-x}\right)^2$

$\Rightarrow 1 + x = x^2 + 1 - x + 2x\sqrt{1-x}$

$\Rightarrow 2x\sqrt{1-x} = 2x - x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2\sqrt{1-x} = 2 - x\,(Vn) \end{array}\right. \Rightarrow x = 0.$

Thử lại thấy $x = 0$ là nghiệm của $f(x) = 0$.

Bảng xét dấu:

x	-1		0		1
$f(x)$		-	0	+	

Ta có: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,017 > 0;\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -0,017 < 0$ (Dùng MTBT).

Hàm $f(x)$ liên tục và vô nghiệm trên $[-1;\ 0);\ (0;\ 1]$ nên trên từng khoảng này $f(x)$ không đổi dấu.

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [0;\ 1]$.

Chú thích: Để tính giá trị hàm số $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x$ tại các điểm $x = \dfrac{1}{2}, x = -\dfrac{1}{2}$ ta làm như sau:

Nhập vào hàm số bằng cách:

[√■] [1] [+] [ALPHA] [)] [▶] [−] [√■] [1] [−] [ALPHA] [)] [▶] [−] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC] , màn hình xuất hiện | X? |

Nhập [1] [■/■] [2] [=] , ta được kết quả là 0,0176.

Ấn [CALC], nhập [−] [1] [■/■] [2] [=] ta được kết quả -0,0176.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình: $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}\ge 1-x$ (1).

Lời giải

Cách 1. Phương pháp cơ bản

Điều kiện $x>\frac{2}{3}$.

$$\text{bpt}(1)\Leftrightarrow x^2-(3x-2)\ge(1-x)\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow(x-1)(x-2)+(x-1)\sqrt{3x-2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x-2+\sqrt{3x-2}\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1\ge 0\\ \sqrt{3x-2}\ge 2-x\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\le 0\\ \sqrt{3x-2}\le 2-x\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ 2-x\le 0\end{cases}\vee\begin{cases}x\ge 1\\ 2-x\ge 0\\ 3x-2\ge(2-x)^2\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{2}{3}<x\le 1\\ 2-x>0\\ 3x-2\le(2-x)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ \begin{cases}1\le x\le 2\\ x^2-7x+6\le 0\end{cases}\end{array}\right.\\ \begin{cases}\frac{2}{3}\le x\le 1\\ x^2-7x+6\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ \begin{cases}1\le x\le 2\\ 1\le x\le 6\end{cases}\end{array}\right.\\ \begin{cases}\frac{2}{3}\le x\le 1\\ \left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge 6\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ 1\le x\le 2\\ \frac{2}{3}\le x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Cách 2. Có sự hỗ trợ Máy tính

Điều kiện $x>\frac{2}{3}$. Ta có $\text{bpt}(1)\Leftrightarrow\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}+x-1\ge 0$

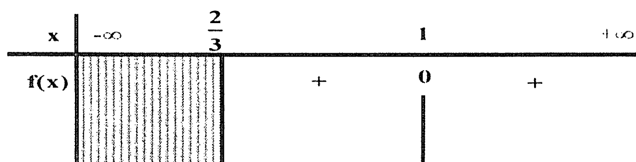
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}+x-1, x\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

Ta có

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x-2+\sqrt{3x-2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \sqrt{3x-2}=2-x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 3x-2=(2-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \begin{cases} \dfrac{2}{3}<x\le 2 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Bảng xét dấu



Hàm số $f(x)$ liên tục và vô nghiệm trên các khoảng $\left(\dfrac{2}{3};1\right),(1;+\infty)$ nên trên từng khoảng này $f(x)$ không đổi dấu.

Ta có $f\left(\dfrac{5}{6}\right)=0,108>0$, $f(2)=1>0$.

Dựa vào bảng xét dấu, ta suy ra được tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Chú thích: Để tính giá trị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}+x-1$ tại các điểm $x=\dfrac{5}{6}, x=2$ ta làm như sau:

Nhập vào hàm số bằng cách:

[▭/▭] [ALPHA] [)] [x^2] [▼] [√▭] [3] [ALPHA] [)] [−] [2] [▶] [▶] [−] [√▭] [3] [ALPHA] [)] [−] [2] [▶] [+] [ALPHA] [)] [−] [1]

Ấn [CALC], màn hình xuất hiện | X? |

Nhập [5] [▭/▭] [6] [=] [S⇔D], ta được kết quả là 0,108.

Ấn [CALC], nhập [2] [=] ta được kết quả 1.

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{1-x}} \ge \left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{1+x}-x}$ (*)

Lời giải

Cách 1. Sử dụng phương pháp cơ bản

Nhận thấy $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Điều kiện: $\begin{cases}1-x\ge 0\\1+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le 1\ (1)$

- TH 1: $x^2+x+1=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$ thì $\text{bpt}(*)$ thỏa mãn
- TH 2: $x^2+x+1>1\Leftrightarrow x^2+x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>0\end{array}\right.$ kết hợp điều kiện (1) ta được $0<x\le 1\ (2)$

  Lúc đó:

  $$\begin{aligned}&\text{bpt}(*)\Leftrightarrow\sqrt{1-x}\ge\sqrt{1+x}-x\Leftrightarrow\sqrt{1-x}+x\ge\sqrt{1+x}\\&\Leftrightarrow 1-x+x^2+2x\sqrt{1-x}\ge 1+x\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}\ge 2-x\\&\Leftrightarrow 4(1-x)\ge 4-4x+x^2\Leftrightarrow x^2\le 0\Leftrightarrow x=0\left(\text{loại vì không thỏa điều kiện (2)}\right)\end{aligned}$$

- TH 3: $0<x^2+x+1<1\Leftrightarrow -1<x<0\ (3)$

  $$\begin{aligned}&\text{bpt}(*)\Leftrightarrow\sqrt{1-x}\ge\sqrt{1+x}-x\Leftrightarrow 1-x\ge 1+x-2x\sqrt{1+x}+x^2\\&\Leftrightarrow x^2+2x-2x\sqrt{1-x}\ge 0\Leftrightarrow x+2-2\sqrt{1-x}\le 0\\&\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x}\ge x+2\Leftrightarrow 4(1+x)\ge x^2+4x+4\\&\Leftrightarrow x^2\le 0\Leftrightarrow x=0\left(\text{loại vì không thỏa điều kiện (3)}\right)\end{aligned}$$

  Vậy nghiệm của bất phương trình (*) là $x=0,x=1$.

Cách 2. Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Bất phương trình đã cho viết lại $\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{1-x}}-\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{1+x}-x}\ge 0$

Đặt $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{1-x}}-\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{1+x}-x}$.

Ta đi giải phương trình $f(x)=0$.

Ta có

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x+1=1\\-1\le x\le 1\end{cases}\\\begin{cases}x^2+x+1\ne 1\\-1\le x\le 1\\\sqrt{1-x}=\sqrt{1+x}-x\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,x=1\\\begin{cases}x\in(-1;1]\setminus\{0\}\\1-x=1+x+x^2-2x\sqrt{1+x}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,x=1\\\begin{cases}x\in(-1;1]\setminus\{0\}\\2\sqrt{1+x}=x+2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy $f(x)=0$ có nghiệm $x=0; x=-1$.

Hàm số $f(x)$ liên tục và vô nghiệm trên các khoảng $(-1;0)$ và $(0;1]$ nên trên các khoảng này $f(x)$ không đổi dấu.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)			0	-	0	-			

Ta thấy $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-0,0035<0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-0,0147<0$.

Từ đó ta thấy bất phương trình có nghiệm $x=1, x=0$.

Chú thích: Để tính giá trị hàm số $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{1-x}}-\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{1+x}-x}$ tại các điểm $x=-\frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}$ ta làm như sau:

Nhập vào hàm số bằng cách:

[(] [ALPHA] [)] [x^2] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [$x^{\blacksquare}$] [$\sqrt{\blacksquare}$] [1] [−] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [−] [(]
[ALPHA] [)] [x^2] [+] [ALPHA] [)] [+] [1] [)] [$x^{\blacksquare}$] [$\sqrt{\blacksquare}$] [1] [+] [ALPHA] [)] [▶] [−] [ALPHA] [)]

Ấn [CALC], màn hình xuất hiện | X? |

Nhập [−] [1] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [2] [=], ta được kết quả là –0,0035.

Ấn [CALC], nhập [1] [$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$] [2] [=] ta được kết quả –0,0147.

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1}}>\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$ (1)

Lời giải

Cách 1. Điều kiện:

$$\begin{cases}0<2x^2-3x+1\neq 1\\ 0<x+1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)\quad (2)$$

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{-\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}}>\frac{1}{-\log_3(x+1)}\Leftrightarrow\frac{1}{\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}}<\frac{1}{\log_3(x+1)}\quad (3)$$

- TH 1: Khi $-1 < x < 0$.

  Khi đó $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 1 \\ x + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 0 \\ \log_3 (x+1) < 0 \end{cases} \Rightarrow (3)$ vô nghiệm

- TH 2: Khi $0 < x < \frac{1}{2}$. Khi đó $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 < 1 \\ x + 1 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 0 \\ \log_3 (x+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow (3)$

  đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

- TH 3: Khi $1 < x < \frac{3}{2}$. Khi đó

  $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = x(2x-3) + 1 < 1 \\ x + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \sqrt{2x^2 - 3x + 1} < 0 \\ \log_3 (x+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow (3)$

nghiệm đúng với mọi $x \in \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

- TH 4: Khi $x > \frac{3}{2}$. Khi đó $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 1 \\ x + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 0 \\ \log_3 (x+1) > 0 \end{cases}$

  Lúc đó

  $(3) \Leftrightarrow \log_3 \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > \log_3 (x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} > x + 1$
  $\Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x > 5.$

  Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.

Cách 2. Điều kiện

$$\begin{cases} 0 < 2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \\ 0 < x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1}} - \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}} (x+1)}$

Với điều kiện (2), thì

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right.$

So sánh điều kiện (2) thì $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Hàm số $f(x)$ liên tục và vô nghiệm trên các khoảng

$(-1;0)$; $\left(0;\frac{1}{2}\right)$; $\left(1;\frac{3}{2}\right)$; $\left(\frac{3}{2};5\right)$; $(5;+\infty)$ nên trên từng khoảng này $f(x)$ không đổi dấu.

Ta có

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-3,585<0$; $f\left(\frac{1}{4}\right)=7,164>0$; $f\left(\frac{5}{4}\right)=3,595>0$; $f(2)=-1<0$; $f(6)=0,0163>0$

Bảng xét dấu

x	-∞		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		5		+∞
f(x)			‖	-	‖	+	‖		‖	+	‖	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu của $f(x)$, ta suy ra $f(x)>0$ có tập nghiệm là

$$T=\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup(5;+\infty).$$

Chú thích: Để tính giá trị hàm số $f(x)=\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1}}-\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$ tại các điểm ta làm như sau:

Nhập vào hàm số bằng cách:

[1] [▭/▭] [log▭□] [1] [▭/▭] [3] [▶] [▶] [√▭] [2] [ALPHA] [)] [x²] [−] [3] [ALPHA] [)] [+] [1] [▶] [▶] [▶] [−] [1] [▭/▭] [log▭□] [1] [▭/▭] [3] [▶] [▶] [ALPHA] [)] [+] [1]

Ấn [CALC], màn hình xuất hiện | X? |

Nhập [−] [1] [▭/▭] [2] [=], ta được kết quả là -3,584.

Ấn [CALC], nhập [1] [▭/▭] [4] [=] ta được kết quả 7,164.

Ấn [CALC], nhập [5] [▭/▭] [4] ta được kết quả 3,595.

Ấn [CALC], nhập [2] [=] ta được kết quả -1.

Ấn [CALC], nhập [6] [=] ta được kết quả 0,0163.

Bài toán 4. Ứng dụng vào giải hệ phương trình

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT: (THỦ THUẬT CALC 100)

Ví dụ 1. Cho đa thức: $4X+1$, nếu ta nhập vào màn hình biểu thức $4X+1$, sau đó ấn phím [CALC], nhập [1] [0] [0] [=], thì ta được kết quả là 401

Ví dụ 2. Cho đa thức X^2-X+1, nếu ta nhập vào màn hình biểu thức X^2-X+1 sau đó ấn phím [CALC], nhập [1] [0] [0] [=] , ta được kết quả 9901

Ví dụ 3. Cho đa thức $2X^2-1$, nếu ta nhập vào màn hình biểu thức $2X^2-1$, sau đó ấn phím [CALC], nhập [1] [0] [0] [=] ta được kết quả 19999

Bây giờ, giả sử ta có 401, 9901, 19999 cho trước thì làm thế nào ta tìm một đa thức theo biến X để khi thực hiện lệnh **CALC 100** thì nó sẽ được kết quả là 401, 9901, 19999. Đây chính là nội dung thủ thuật **CALC 100**

Bài toán: Giả sử có số $\overline{abcdef}$, chuyển số này về đa thức theo biến X ta làm như sau:

- **Bước 1: Từ phải sang trái**. tách số $\overline{abcdef}$ thành các nhóm gồm hai chữ số. Nghĩa là: $ab|cd|ef$. Ở đây tất cả có ba nhóm nên đa thức chuyển về sẽ là đa thức bậc hai $f(X)=a_2X^2+a_1X+a_0$ (có trường hợp $f(X)$ là đa thức bậc ba) . Tổng quát nếu có n nhóm thì đa thức chuyển về sẽ là đa thức bậc n hoặc n+1.
- **Bước 2:** Xác định hệ số a_0
  - Nếu $ef<50$ thì $a_0=ef$
  - Nếu $ef>50$ thì $a_0=ef-100$, đồng thời hệ số của **số hạng đứng trước nó là** a_1 **phải tăng thêm một đơn vị**
  - Nếu $ef=50$ thì chuyển sang thủ tục **CALC 1000**
- **Bước 3:** Xác định hệ số a_1. Quy tắc xác định tương tự như ở bước 2
- **Bước 4:** Xác định hệ số a_2. Quy tắc xác định tương tự bước 2

Áp dụng: Ta thực hiện thủ thuật CALC 100 để làm ba ví dụ trên

Ví dụ 1: Đối với số 401.

+ Bước 1: Từ phải sang trái. Tách số 401 theo các nhóm gồm hai chữ số 4 | 01, ta được 4 và 01. Ở đây có tất cả hai nhóm nên đa thức chuyển về là đa thức $f(X)=a_1X+a_0$

+ Bước 2: Nhận thấy $01<50$ nên $a_0=01=1$

+ Bước 3: Vì $4<50$ nên $a_1=4$

+ Bước 4: Vậy $f(X)=4X+1$

Ví dụ 2. Áp dụng với 9901

+ Bước 1: Từ phải sang trái. Tách số 9901 theo các nhóm gồm hai chữ số 99 | 01, ta được 99 và 01. Ở đây có tất cả hai nhóm nên đa thức chuyển về là đa thức $f(X) = a_1X + a_0$

+ Bước 2: Nhận thấy $02 < 50$ nên $a_0 = 02 = 2$

+ Bước 3: Vì $99 > 50$ nên $a_1 = 99 - 100 = -1$

+ Bước 4: Hệ số của X^2 lúc đầu là 0 nên hệ số của X^2 tăng thêm 1 đơn vị, nghĩa là $0 + 1 = 1$

+ Bước 5: vậy $f(X) = X^2 - X + 1$

Ví dụ 3. Áp dụng với 19999

+ Bước 1: Từ phải sang trái. Tách số 19999 theo các nhóm gồm hai chữ số 1| 99 |99, ta được 99 , 99 và 1. Ở đây có tất cả hai nhóm nên đa thức chuyển về là đa thức $f(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$

+ Bước 2: Nhận thấy $99 > 50$ nên $a_0 = 99 - 100 = -1$, lúc đó hệ số của a_1 phải tăng lên 1 đơn vị

+ Bước 3: Vì $99 > 50$ nên $a_1 = 99 - 100 + (1) = 0$

+ Bước 4: Vì $1 < 50$ nên $a_2 = 1 + (1) = 2$

+ Bước 5: vậy $f(X) = 2X^2 - 1$

Thủ thuật CALC 1000

Bài toán: Phân tích $f(x;y) = x^2 - 2y^2 + xy + 150y - 2500$ thành nhân tử.

+ Bước 1: Vì bậc của x, y bằng nhau nên ta chọn x làm biến hay y làm biến gì cũng đều được. Ở đây ta chọn x làm biến số

+ Bước 2: Cho $y = 100$ ta được $x^2 + 100x - 7500$

+ Bước 3: Phân tích $x^2 + 100x - 7500 = (x + 150)(x - 50)$. Ở đây ta thấy có số 50 nên ta phải chuyển qua thỉ tục **CACL 1000**

Nội dung CALC 1000

+ Bước 1: Vì bậc của x, y bằng nhau nên ta chọn x làm biến hay y làm biến gì cũng đều được. Ở đây ta chọn x làm biến số

+ Bước 2: Cho $y = 1000$ ta được $x^2 + 1000x - 1852500$

+ Bước 3: Phân tích $x^2 + 1000x - 1852500 = (x + 1950)(x - 950)$.

+ Bước 4: Dùng thủ thuật **CALC 1000** để chuyển các số 1950 và 950 về đa thức theo biến y

Cụ thể

Chuyển số 1950

+ Bước 1: Từ phải sang trái. Tách số 1950 theo các nhóm gồm 3 chữ số 1 | 950, ta được 950 và 1. Ở đây có tất cả hai nhóm nên đa thức chuyển về là đa thức $f(Y) = a_1Y + a_0$

+ Bước 2: Nhận thấy $950 > 500$ nên $a_0 = 950 - 1000 = -50$

+ Bước 3: Vì $1 < 500$ nên $a_1 = 1 + (1) = 2$

+ Bước 4: Vậy $f(Y) = 2Y - 50$

Chuyển số 950. Hoàn toàn tương tự ta được $950 = y - 50$

+ Bước 5: Suy ra $(x + 1950)(x - 950) = (x + 2y - 50)(x + y - 50)$

nên $f(x;y) = x^2 - 2y^2 + xy + 150y - 2500 = (x + 2y - 50)(x + y - 50)$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

BT 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$

(Trích Đề thi Đại học khối D 2008, Bộ Giáo dục)

Định hướng: Dùng **CALC 100** để phân tích phương trình (1) của hệ thành nhân tử

Ta có : $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2y^2 - xy - x - y = 0.$

Đặt $f(x;y) = x^2 - 2y^2 - xy - x - y$

+ Bước 1: Vì bậc của x, y bằng nhau nên ta chọn x làm biến hay y làm biến gì cũng đều được. Ở đây ta chọn x làm biến số

+ Bước 2: Cho $y = 100$ ta được $x^2 - 101x - 20100$

+ Bước 3: Phân tích $x^2 - 101x - 20100 = (x + 100)(x - 201)$

+ Bước 4: Dùng thủ thuật **CALC 100** để chuyển các số 100 và 201 về đa thức theo biến y ta được $y = 100$ và $2y + 1 = 201$

+ Bước 5: Suy ra $(x + 100)(x - 201) = (x + y)(x - 2y - 1)$

nên $f(x;y) = x^2 - 2y^2 - xy - x - y = (x + y)(x - 2y - 1)$

Chú ý: Sau khi phân tích thành nhân tử rồi ta phải kiểm tra lại kết quả phân tích có đúng không bằng cách nhân phân phối ra hoặc thay vài giá trị $(x;y)$ vào đa thức ban đầu và đa thức đã phân tích thành nhân tử. Nếu kết quả chúng bằng nhau thì Ok.

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)(x-2y-1)=0 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$$

Từ điều kiện ta suy ra $x+y>0$ nên phương trình thứ nhất tương đương với $x=2y+1$, thay vào phương trình thứ hai ta được

$(y+1)\sqrt{2y}=2(y+1) \Leftrightarrow y=2$ (do $y+1>0$) $\Rightarrow x=5$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(5;2)$.

BT 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0 & (1) \\ y+x-2=0 & (2) \end{cases}$

(Trích Đề thi Đại học khối D 2012, Bộ Giáo Dục)

Định hướng: Dùng **CALC 100** để phân tích phương trình (1) của hệ thành nhân tử

Đặt $f(x;y)=2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y$

+ Bước 1: Vì bậc của x lớn hơn bậc của y nên chọn y làm biến số

+ Bước 2: Cho $x=100$ ta được $y^2-10201y-2010000$

+ Bước 3: Phân tích $y^2-10201Y-2010000=(y-10000)(y-201)$

+ Bước 4: Dùng thủ thuật **CALC 100** để chuyển các số 10000 và 201 về đa thức theo biến x ta được $x^2=10000$ và $2x+1=201$

+ Bước 5: Suy ra $(y-1000)(y-201)=(y-x^2)(y-2x-1)$

nên $f(x;y)=2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=(y-x^2)(y-2x-1)$

Giải

Phương trình thứ nhất tương đương với: $(y-x^2)(y-2x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=2x+1 \end{array}\right.$

- Với $y=x^2$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

  $x^3+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=4 \end{array}\right.$

- Với $y=2x+1$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

  $3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow y=\dfrac{5}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$(x;y)=(1;1);(x;y)=(-2;4);(x;y)=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$

BT 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 & (1)\\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 & (2)\end{cases}$

(Trích Đề thi Đại học khối A 2011, Bộ Giáo Dục)

Định hướng: Dùng **CALC 100** để phân tích phương trình (2) của hệ thành nhân tử

Đặt $f(x;y)=xy(x^2+y^2)+2-(x+y)^2$

+ Bước 1: Vì bậc của x và y bằng nhau nên ta chọn x làm biến số (nếu chọn y cũng được).

+ Bước 2: Cho $y=100$ ta được $100x^3-x^2+999800x-9998$

+ Bước 3: Phân tích $100x^3-x^2+999800x-9998=(100x-1)(x^2+9998)$

+ Bước 4: Dùng thủ thuật **CALC 100** để chuyển các số 100 và 9998 về đa thức theo biến x ta được $y=100$ và $y^2-2=9998$

+ Bước 5: Suy ra $(100x-1)(x^2+9998)=(xy-1)(x^2+y^2)-2$ nên

$f(x;y)=xy(x^2+y^2)+2-(x+y)^2=(yx-1)(x^2+y^2-2)$

Giải

Phương trình thứ hai tương đương với:

$(yx-1)(x^2+y^2-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}xy=1\\ x^2+y^2=2\end{array}\right.$

$\oplus TH1:\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0\\ xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

$\oplus TH2:\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0\\ x^2+y^2=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-(x^2+y^2)(x+y)=0\\ x^2+y^2=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x\ \vee\ y=\frac{1}{2}x\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\end{cases}$

BT 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+y^2-3xy+3xy-2y+1=0 & (1) \\ 4x^2-y^2+x+4=\sqrt{2x+y}+\sqrt{x+4y} & (2) \end{cases}$

(Trích Đề thi Đại học khối B 2013, Bộ Giáo Dục)

Định hướng: Dùng **CALC 100** để phân tích phương trình (1) của hệ thành nhân tử

Đặt $f(x;y)=2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1$

+ Bước 1: Vì bậc của x và y bằng nhau nên ta chọn x làm biến số (nếu chọn y cũng được).

+ Bước 2: Cho $y=100$ ta được $2x^2-297x+9801$

+ Bước 3: Phân tích $2x^2-297x+9801=(2x-99)(x-99)$

+ Bước 4: Dùng thủ thuật **CALC 100** để chuyển các số 99 về đa thức theo biến y ta được $y-1=99$

+ Bước 5: Suy ra $(2x-99)(x-99)=(2x-y+1)(x-y+1)$ nên

$f(x;y)=2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=(2x-y+1)(x-y+1)$

Giải

Phương trình thứ nhất tương đương với: $(2x-y+1)(x-y+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$

- Với $y=2x+1$ thế vào phương trình thứ hai ta được:

  $f(x)=\sqrt{4x+1}+\sqrt{9x+4}=3-4x=g(x)\ (*)$, $x\geq\frac{1}{4}$

  $f(x)$ là hàm đồng biến, $g(x)$ là hàm nghịch biến trên $\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$

  Nhận thấy $x=0$ là nghiệm của (*) nên $y=1$.

- Với $y=x+1$ thế vào phương trình thứ hai ta được

$\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3, \left(x\geq-\frac{1}{3}\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3(x-1)x+2x+3$

$\Leftrightarrow\left[\sqrt{3x+1}-(x+1)\right]+\left[\sqrt{5x+4}-(x+2)\right]=3(x-1)x$

$\Leftrightarrow\frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+(x+1)}+\frac{-x^2+x}{\sqrt{5x+4}+(x+2)}=3(x^2-x)$

$\Leftrightarrow x^2-x=0$ hay $\frac{-1}{\sqrt{3x+1}+(x+1)}+\frac{-1}{\sqrt{5x+4}+(x+2)}=3(VN)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\rightarrow y=1 \\ x=1\rightarrow y=2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(0;1);(x;y)=(1;2)$.

MỤC LỤC